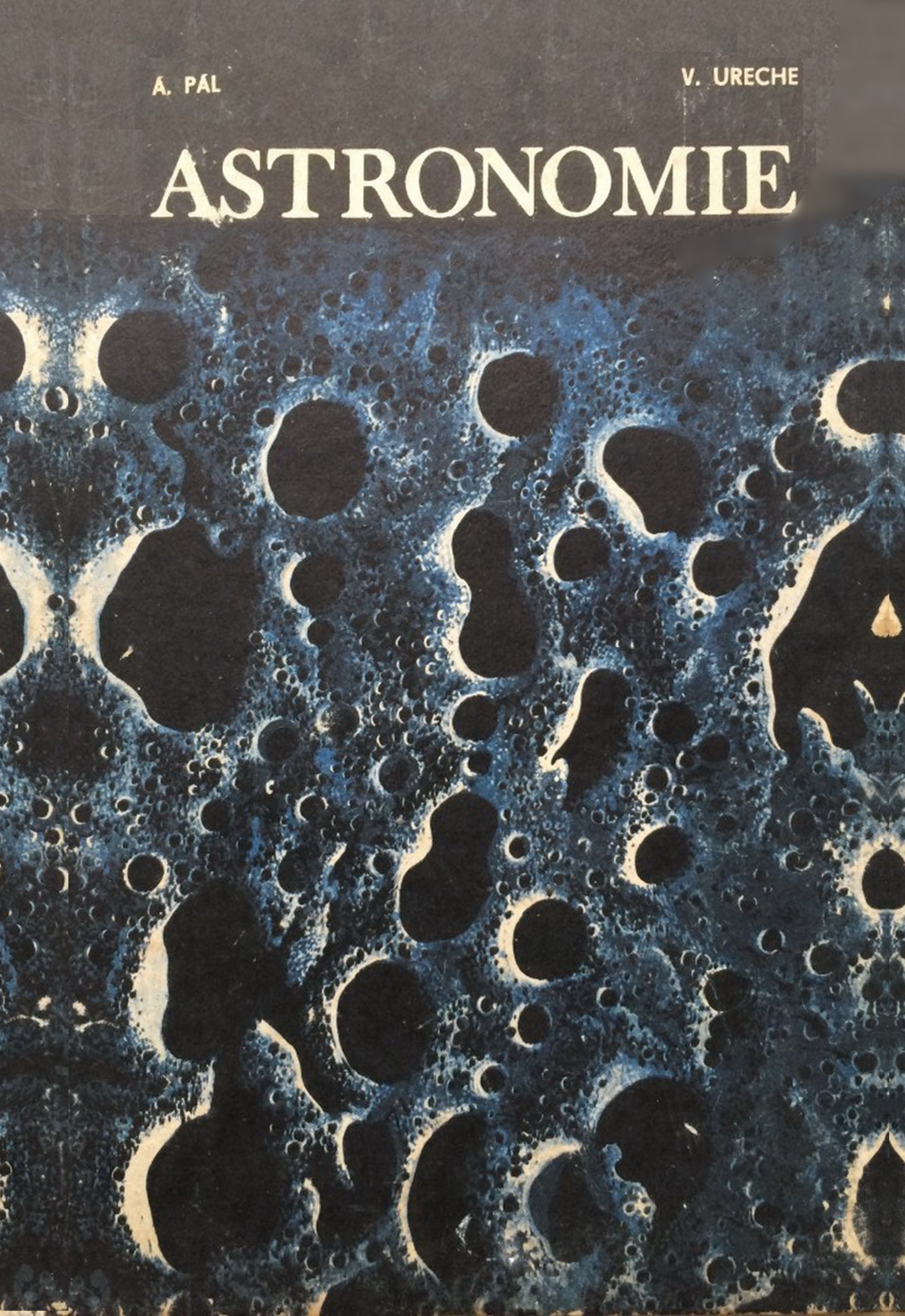
A. PÁL

V. URECHE

ASTRONOMIE



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. dr. Á. PÁL **Lect. dr. V. URECHE**

ASTRONOMIE

Manualul a fost analizat și aprobat de Colectivul de astronomie al Catedrei de ecuații diferențiale și informatică, de Consiliul profesoral al Facultății de matematică și avizat de Biroul Senatului Universității „Babeș-Bolyai" din Cluj-Napoca

Referenți științifici: Cerc. șt. pr. dr. **I. Todoran**
Lect. dr. **V. Pop**
Cerc. șt. dr. **V. Mioc**

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI

CUPRINS

Prefață 7

CAPITOLUL I. **Elemente introductive** 9

§ 1.1. Obiectul și scopul astronomiei 9
§ 1.2. Metodele de lucru ale astronomiei 10
§ 1.3. Structura părții accesibile a Universului. Metagalaxia 11
§ 1.4. Subîmpărțirea astronomiei moderne 14
§ 1.5. Coordonarea cercetărilor astronomice și spațiale pe plan mondial 15

CAPITOLUL II. **Astronomia sferică** 17

§ 2.1. Sfera cerească: rotația, punctele, planele și liniile ei fundamentale 17
§ 2.2. Coordonate cerești 21
§ 2.3. Relațiile dintre coordonatele geografice și cele cerești în cazul trecerilor la meridianul ceresc 23
§ 2 4. Mișcarea Soarelui pe ecliptică 24
§ 2.5. Sistemul de coordonate ecliptice 26
§ 2.6. Anul tropic și anul sideral. Precesia echinocțiilor 27
§ 2.7. Efectele mișcării anuale aparente a Soarelui 27
§ 2.8. Coordonate galactice 28
§ 2.9. Transformarea coordonatelor cerești 28
§ 2.10. Calculul timpului și locului răsăritului și apusului aștrilor 30

CAPITOLUL III. **Pământul — corp ceresc** 32

§ 3.1. Forma și dimensiunile Pământului. Triangulația 32
§ 3.2. Cele trei latitudini geografice 35
§ 3.3. Variația forței de gravitație la suprafața Pământului în funcție de latitudine . 36
§ 3.4. Măsurarea masei și densității medii a Pământului 37
§ 3.5. Structura Pământului 37
§ 3.6. Mișcările Pământului 41
§ 3.7. Contribuția observatoarelor astronomice din țară la studiul structurii și mișcărilor Pământului 42

CAPITOLUL IV. **Fenomene care modifică pozițiile aștrilor pe cer** 44

§ 4.1. Refracția astronomică 44
§ 4.2. Aberația luminii 46
§ 4.3. Paralaxe diurne și anuale. Determinarea distanțelor aștrilor prin metoda trigonometrică 48
§ 4.4. Precesia și nutația 53
§ 4.5. Mișcările proprii ale stelelor 54
§ 4.6. Problemele astronomiei (astrometriei) fundamentale 55

CAPITOLUL V. **Timpul şi măsurarea lui** 57

§ 5.1. Consideraţii generale 57
§ 5.2. Timpul astronomic: timpul terestru şi timpul efemeridelor 58
§ 5.3. Timpul fizic: timpul atomic internaţional 64
§ 5.4. Unităţile fundamentale de timp 65
§ 5.5. Calendarul 65

CAPITOLUL VI. **Mişcările aparente ale planetelor şi sateliţilor** 68

§ 6.1. Mişcarea aparentă a planetelor 68
§ 6.2. Explicarea mişcărilor aparente ale planetelor în antichitate. „Sistemul lumii" după Ptolemeu 70
§ 6.3. Trecerea la sistemul heliocentric al lui Copernic — revoluţie în concepţia despre Univers 71
§ 6.4. Explicarea mişcărilor aparente ale planetelor. Ecuaţiile mişcării sinodice 72
§ 6.5. Lupta pentru concepţia heliocentrică. Primele descoperiri făcute cu luneta de Galilei 73
§ 6.6. Perfecţionarea sistemului copernican. Legile mişcării planetelor — descoperirea lui Kepler 74
§ 6.7. Mişcarea aparentă a Lunii 75
§ 6.8. Fazele planetelor. Eclipse 76

CAPITOLUL VII. **Mecanică cerească** 78

§ 7.1. Principiile, problemele şi metodele fundamentale ale mecanicii cereşti 78
§ 7.2. Legea atracţiei universale a lui Newton 80
§ 7.3. Teorema lui Newton privind atracţia unei sfere omogene goale 82
§ 7.4. Problema celor două corpuri 84
§ 7.5. Problema celor n ($n \geqslant 3$) corpuri 98

CAPITOLUL VIII. **Teoria radiaţiei. Fotometria astronomică** 107

§ 8.1. Intensitate. Flux. Intensitate medie pe discul aparent 107
§ 8.2. Luminozitatea şi strălucirea astrului 110
§ 8.3. Coeficienţii de emisie şi de absorbţie 112
§ 8.4. Legile radiaţiei corpului negru 113
§ 8.5. Densitatea de energie radiantă şi presiunea de radiaţie 114
§ 8.6. Fotometria astronomică 116
§ 8.7. Sisteme de magnitudini 118

CAPITOLUL IX. **Aplicaţii ale analizei spectrale în astrofizică** 121

§ 9.1. Spectre stelare 121
§ 9.2. Clasificarea spectrală Harvard a stelelor 123
§ 9.3. Procesele care stau la baza formării spectrelor stelare 125
§ 9.4. Legea lui Boltzmann şi legea lui Saha 127
§ 9.5. Deplasarea liniilor spectrale 128

CAPITOLUL X. **Parametrii de stare ai stelelor. Relaţii de stare** 129

§ 10.1. Parametrii de stare 129
§ 10.2. Determinarea maselor stelare 130
§ 10.3. Determinarea temperaturilor stelare 132
§ 10.4. Determinarea razelor stelare 134
§ 10.5. Determinarea luminozităţii stelelor 135
§ 10.6. Relaţiile de stare ale stelelor 137

CAPITOLUL XI. **Atmosfere stelare** 141

§ 11.1. Atmosfera solară 141
§ 11.2. Ecuaţia transferului radiativ 144
§ 11.3. Despre calculul modelelor de atmosferă stelară 146

CAPITOLUL XII. **Interiorul stelelor** 150

§ 12.1 Ecuaţiile interiorului 150
§ 12.2. Rolul compoziţiei chimice 154
§ 12.3. Teorema lui Vogt-Russell (unicitatea soluţiei) 155
§ 12.4. Modele stelare 156
§ 12.5. Sursele energiei stelare 157

CAPITOLUL XIII. **Galaxia noastră** 161

§ 13.1. Structura generală a Galaxiei 161
§ 13.2. Mişcarea stelelor. Rotaţia Galaxiei 162
§ 13.3. Stele duble 163
§ 13.4. Stele variabile şi obiecte nestaţionare 165
§ 13.5. Roiuri şi asociaţii stelare 168
§ 13.6. Materia interstelară 170

CAPITOLUL XIV. **Elemente de astronomie extragalactică** 172

§ 14.1. Clasificarea galaxiilor 172
§ 14.2. Determinarea distanţelor galaxiilor 173
§ 14.3. Proprietăţile fizice ale galaxiilor 174
§ 14.4. Radiogalaxii. Quasari 175
§ 14.5. Distribuţia spaţială a galaxiilor 176
§ 14.6. Noţiuni de cosmologie 177

CAPITOLUL XV. **Originea şi evoluţia corpurilor cereşti** 181

§ 15.1. Vîrsta corpurilor cereşti 181
§ 15.2. Originea şi evoluţia stelelor 182
§ 15.3. Formarea sistemului solar. Ipoteze cosmogonice 186

Anexa 1. Noţiuni şi formule de trigonometrie sferică 191
Anexa 2. Constelaţiile 200
Anexa 3. Date generale relative la planetele mari 202
Anexa 4. Date generale relative la sateliţii planetelor mari: 203
Anexa 5. Elemente de mecanică cerească 205
Anexa 6. Soluţia aproximativă a lui Eddington pentru ecuaţia transferului radiativ 219
Anexa 7. Modele politropice. Modelul standard 223

PREFAȚĂ

Lucrarea de față prezintă principalele probleme, metode și rezultate din capitolele astronomiei actuale: astrometrie, mecanică cerească, astrofizică, astronomie stelară, cosmologie și cosmogonie. Rezultatele de bază ale astronomiei clasice sînt îmbinate cu noile cuceriri ale astronomiei spațiale, obținute cu ajutorul sateliților artificiali și al navelor cosmice. În contextul expunerii sînt relevate argumentele astronomice ale tezelor materialist-dialectice despre Univers.

În toate capitolele sale, lucrarea scoate în evidență aportul astronomilor români, străduințile din trecut și cele actuale.

Din lipsă de spațiu, nu sînt incluse în lucrare elemente privind instrumentele și metodele de observare astronomică.

Lucrarea se adresează studenților facultăților de matematică ale universităților din țară, care audiază cursul de astronomie în anul IV, paralel cu un curs de fizică, conform planului de învățămînt în vigoare. Ea va fi utilă și studenților de la facultățile de fizică și geografie, care au în planurile lor de învățămînt, sub un titlu sau altul, capitole de astronomie, precum și studenților de la secțiile de matematică-fizică de 3 ani. Lucrarea va putea fi consultată și de către profesorii de matematică și fizică din licee și gimnazii.

Rezultat al unei colaborări colegiale de mai mulți ani, cartea a fost redactată astfel: capitolele I—VII și anexele 1—5 — de prof. Á Pál, iar capitolele VIII—XV și anexele 6—7 — de lect. V. Ureche.

În încheiere, autorii doresc să mulțumească cercetătorului principal dr. I. Todoran, lectorului univ. dr. V. Pop și cercetătorului științific dr. V. Mioc pentru citirea atentă și observațiile prețioase folosite pentru definitivarea manuscrisului.

Autorii

CAPITOLUL I.

ELEMENTE INTRODUCTIVE

§ 1.1. OBIECTUL ŞI SCOPUL ASTRONOMIEI

Conform principiilor filozofiei ştiinţifice, materialist-dialectice, Universul este infinit în spaţiu şi în timp, ca şi în diversitatea formelor pe care le îmbracă materia în procesul său evolutiv.

O parte din această imensitate este accesibilă omului prin mijloacele lui de cercetare; aceasta formează obiectul ştiinţelor naturii. Ştiinţele „terestre" ale naturii (fizica, chimia, ştiinţele naturale etc.) studiază materia accesibilă direct mijloacelor şi metodelor lor proprii, adică materia terestră. *Astronomia — ştiinţa „cerului"* — studiază materia extraterestră, sub toate formele ei de existenţă, care se manifestă prin energia care este emisă de ea, a cărei limită de perceptibilitate depinde de puterea de separare şi de sensibilitatea specifică a receptoarelor de care dispune omenirea la o etapă dată.

Se înţelege că domeniul astronomiei, ca dealtfel şi domeniul ştiinţelor „terestre", se modifică, extinzîndu-se şi aprofundîndu-se, odată cu creşterea posibilităţilor de investigaţie umană. Pe de o parte, dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii va pune la dispoziţia omenirii telescoape şi radiotelescoape tot mai perfecţionate şi mai puternice, în măsură să împingă mai departe limitele părţii accesibile a Universului, prin descoperirea de noi obiecte şi fenomene cereşti, din ce în ce mai îndepărtate. Pe de altă parte, experienţele cosmice, întreprinse nu de mult cu ajutorul sateliţilor artificiali ai Pămîntului şi al navelor cosmice interplanetare, au creat o nouă „platformă" pentru cercetări profunde şi multilaterale asupra materiei extraterestre (şi chiar asupra materiei terestre), cercetări accesibile numai din această perspectivă. Drept rezultat al acestor experienţe cosmice, efectuate cu aparate automate sau prin participarea omului „la faţa locului", la intersecţia limitelor ştiinţelor „terestre" şi ale astronomiei se conturează astăzi domeniile unor noi ştiinţe, cum sînt: astronautica, fizica cosmică, chimia cosmică, biologia cosmică şi multe altele, printre care şi *astronomia spaţială*, care studiază materia extraterestră cu ajutorul instrumentelor astronomice purtate în afara atmosferei terestre.

Aşa cum arată şi denumirea astronomiei*, cercetarea materiei extraterestre urmăreşte stabilirea legilor generale ce guvernează — sub aspectul mişcării, structurii, originii şi evoluţiei — corpurile cereşti şi, în sens mai

* Cuvîntul *astronomie* provine din contopirea a două cuvinte greceşti: *astron* = astru, corp ceresc, şi *nomos* = lege.

larg, sistemele de corpuri cereşti, substanţa interastrală, cîmpurile gravifice, de radiaţii, magnetice etc. Scopul astronomiei, analog cu scopul altor ştiinţe, este de a descoperi aceste legi şi de a le folosi pentru progresul societăţii, spre binele civilizaţiei umane.

§ 1.2. METODELE DE LUCRU ALE ASTRONOMIEI

1°. **Observaţia şi experienţa.** Metoda de bază a astronomiei este observaţia şi numai într-o mică măsură intervine experienţa, îndeosebi în cadrul cercetărilor spaţiale.

În astronomie, spre deosebire de fizică sau chimie, observaţiile capătă o importanţă deosebită. Pentru a studia un fenomen, fizicienii sau chimiştii îl izolează şi-l reproduc în laborator, iar relaţiile cauzale ale fenomenului nu se modifică prin faptul că între timp s-a schimbat configuraţia Universului. Astronomii, avînd de-a face cu forme ale materiei extraterestre — aflate la distanţe enorme de noi şi în condiţii fizice irealizabile în laborator —, sînt nevoiţi să se limiteze la observarea lor pasivă, şi, repetăm, numai într-o mică măsură pot experimenta cu ele, fie pe Pămînt, fie „la faţa locului".

În plus, evenimentele astronomice se desfăşoară astfel încît ele nu se repetă niciodată în condiţiile anterioare, deseori nici măcar în condiţii asemănătoare. De aceea, orice observaţie astronomică, înregistrarea oricărui fenomen astronomic, poate avea o valoare deosebită: fie că a fost efectuată în urmă cu mii de ani şi este folosită astăzi, fie că se efectuează azi şi va fi folosită, poate, numai peste sute de ani.

Observaţiile şi experienţele astronomice constau în *recepţionarea sau culegerea informaţiilor* din diferitele direcţii ale Universului. Aceste informaţii, adevărate *mesaje ale Universului*, sînt: radiaţiile luminoase, emise sau reflectate de aştri; celelalte radiaţii electromagnetice, situate dincolo de extremităţile roşu şi violet ale spectrului vizibil (razele infraroşii şi undele radio, respectiv razele ultraviolete, razele X şi razele gamma); radiaţiile corpusculare ale Soarelui şi ale altor surse din Univers; radiaţiile cosmice (primare şi secundare); radiaţia neutrinică emisă de Soare, de alte stele, de quasari etc.; meteoriţii; impulsurile radio şi fasciculele laser generate pe Pămînt şi reflectate de pe Lună, de pe sateliţii artificiali şi navele cosmice etc.; şi, în sfîrşit, informaţiile culese cu ocazia zborurilor cosmice (cu sau fără participarea omului).

2°. **Analiza şi inducţia.** Cînd sînt furnizate suficiente date de observaţii sau de experienţă, se poate trece la analizarea fenomenelor. Se elaborează legi şi teorii care stabilesc relaţii între fenomene. Dar nu întotdeauna teoria este corectă; aceasta se întîmplă cînd ea nu reflectă legăturile lăuntrice, cauzale, ale lucrurilor. Asemenea teorii sînt, de pildă, sistemul heliocentric al lui Copernic sau chiar „legile" mişcării planetelor ale lui Kepler.

Legile şi teoria devin valabile atunci cînd ele reflectă corect realitatea şi nu există nici un caz care ar face excepţie. Un exemplu concludent pentru aceasta, după cum vom vedea, îl constituie descoperirea legii atracţiei universale a lui *Newton*. O metodă importantă de stabilire a legilor şi de construire a teoriilor este cea inductivă.

3°. **Sinteza și deducția.** Adevărata confirmare a legii ne este oferită prin aplicarea ei în practică. O lege trebuie să rămînă valabilă în toate consecințele ei, adică și pentru fenomenele analoge necercetate, care n-au luat parte la stabilirea legii. Astfel, *legea lui Newton* s-a dovedit valabilă nu numai pentru mișcarea planetei Marte, din ale cărei observații au fost deduse — pe cale inductivă — legile lui Kepler, dar și pentru mișcarea celorlalte planete, și, de asemenea, pentru mișcarea altor categorii de corpuri cerești (comete, sateliți artificiali, nave cosmice, stele duble etc.).

În astronomie legile sînt folosite și pentru prezicerea fenomenelor cerești. Dacă prognoza se adevereşte, aceasta constituie o nouă verificare a legii. *Exemple* concludente sînt prevederile eclipselor de Soare și de Lună, prognoza duratei vieții sateliților artificiali ai Pămîntului etc.

Metodele de lucru ale astronomiei, comune dealtfel tuturor științelor, corespund celor *trei trepte ale cunoașterii dialectice*, strîns legate între ele, pe care V. I. Lenin le-a formulat astfel:

„Gîndirea, ridicîndu-se de la concret la abstract, nu se îndepărtează — dacă este *justă* (...) — de adevăr, ci se apropie de el. Abstracția *materie*, abstracția *lege* a naturii, abstracția *valoare* etc., într-un cuvînt *toate* abstracțiile științifice (juste, serioase, iar nu arbitrare), reflectă natura mai profund, mai exact, mai *complet*. De la intuirea vie la gîndirea abstractă și *de la ea la practică*, aceasta este calea dialectică a *cunoașterii adevărului*, a cunoașterii realității obiective." (V. I. Lenin, *Opere complete*, ed. II, vol. 29, *Caiete filozofice*, Ed. politică, București, 1966, p. 143).

§ 1.3. STRUCTURA PĂRȚII ACCESIBILE A UNIVERSULUI. METAGALAXIA

Cunoașterea formelor de existență ale materiei extraterestre a fost condiționată (și este și în prezent) de *receptorii de radiații* de care a dispus omenirea.

1°. **Ochiul** este primul receptor capabil să primească radiațiile pe o suprafață mai mică de 1 cm². Timp îndelungat omul a dispus numai de acest receptor natural, concepția sa fiind cea geocentrică *(sistemul lumii al lui Ptolemeu, sec. II î.e.n.)*: Pămîntul este imobil în centrul unei sfere pe care sînt dispuși aștrii care nu-și schimbă pozițiile reciproce — stelele — și aștrii care se deplasează printre stele — planetele. Din acest motiv, cei vechi treceau Soarele și Luna în rîndul planetelor.

Dar rațiunea a învederat sistemul heliocentric *(sistemul lumii al lui Copernic, 1543)*: în realitate, Pămîntul se mișcă în jurul Soarelui, la fel ca și celelalte planete.

2°. **Luneta și telescopul** dezvăluie omului dovezile concepției heliocentrice și structura Metagalaxiei.

(1) *Luneta astronomică*, construită și utilizată prima oară de *Galilei (1610)*, aduce primele probe în favoarea heliocentrismului. Descoperirea paralaxelor stelare și a fenomenului aberației luminii confirmă sistemul heliocentric. Descoperirea celorlalte planete, precum și studiul cometelor, ne oferă imaginea completă a *primei unități de materie extraterestră*: Soarele cu sistemul său *(sistemul solar)*. Acesta se compune din:

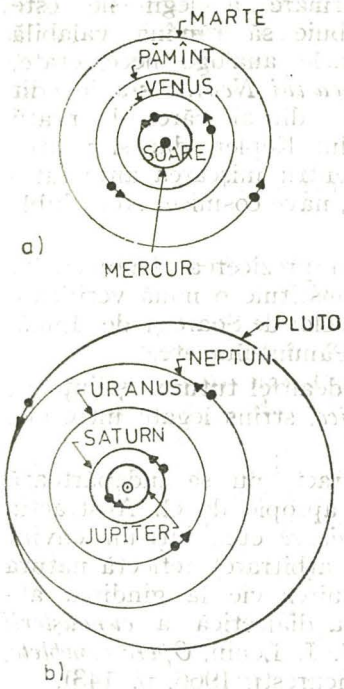


Fig. 1.1. Sistemul solar: a) orbitele planetelor din grupul Pămîntului; b) orbitele planetelor gigante şi orbita planetei Pluto (cerculeţul din interiorul orbitei lui Jupiter reprezintă orbita lui Marte).

— Soarele, corpul central (stea), înglobînd 99,86% din masa sistemului, sursa de energie (şi de viaţă) a întregului sistem;

— 9 planete mari: Mercur, Venus, Pămîntul, Marte, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun şi Pluto;

— 44 sateliţi naturali ai planetelor (în 1982) şi un mare număr de sateliţi artificiali (ai Pămîntului, ai Lunii etc.);

— peste 3000 de planete mici sau asteroizi (numărul lor se estimează la 50 000) şi un număr de planete artificiale;

— aproximativ 600 de comete;

— materia meteoritică şi materia interplanetară.

Toate acestea pînă la o distanţă de cca 40 de unităţi astronomice (UA), distanţa medie de la Soare la planeta Pluto — limita observabilă a sistemului solar (fig. 1.1).

— Un brîu de nuclee cometare care gravitează în cîmpul de atracţie al Soarelui pe orbite eliptice, pînă la o distanţă de 150 000UA.

Deci limita teoretică a sistemului solar se întinde pînă la 150 000 UA (aproximativ 2 ani lumină).

(2) *Telescopul* lui *W. Herschel (sec. XVIII)*, descoperă omenirii lumea stelelor, întrucît suprafaţa receptoare se apropie de 1 m². Astfel apar stelele, simple, duble sau multiple, apoi roiurile stelare, deschise sau globulare. Steaua cea mai apropiată de noi este Proxima Centauri, care se află la 4,3 a.l. (ani lumină). Distanţa medie reciprocă dintre stele este de ordinul a 4—5 a.l. Dar această lume stelară apare deformată: stelele par uniform distribuite în jurul unui Soare central.

(3) *Telescopul* cu diametrul *D = 2,50 m de la Mount Wilson (1920)*, avînd o suprafaţă receptoare de ordinul metrilor pătraţi, ne dă o imagine corectă asupra sistemului de stele din care facem parte. *Shapley*, studiind distribuţia roiurilor stelare globulare, determină forma şi dimensiunile celei de-*a doua unităţi de materie extraterestră: Galaxia*. Se mai pune în evidenţă existenţa materiei interstelare prin absorbţia energiei emise de stele. Deci toate stelele vizibile, roiurile stelare, nebuloasele galactice, împreună cu materia interstelară, formează o grupare care, privită din profil, este de formă lenticulară (cu un nucleu central), avînd axa mare de 100 000 a.l. şi axa mică de 16 000 a.l., în care Soarele se află la distanţa de 30 000 a.l. de centrul ei (fig. 1.2). Aglomerarea stelelor în jurul planului de simetrie al Galaxiei se observă pe cer sub forma *Căii Lactee*, fîşia de lumină alburie care înconjoară cerul ca un cerc mare.

În afara Galaxiei noastre apar alte galaxii; cea mai apropiată galaxie asemănătoare cu a noastră este *galaxia M 31* („Nebuloasa" din Andromeda)*

* Galaxiile pitice Norii lui Magellan şi sistemele din Cuptorul şi Sculptorul sînt mai apropiate decît M 31.

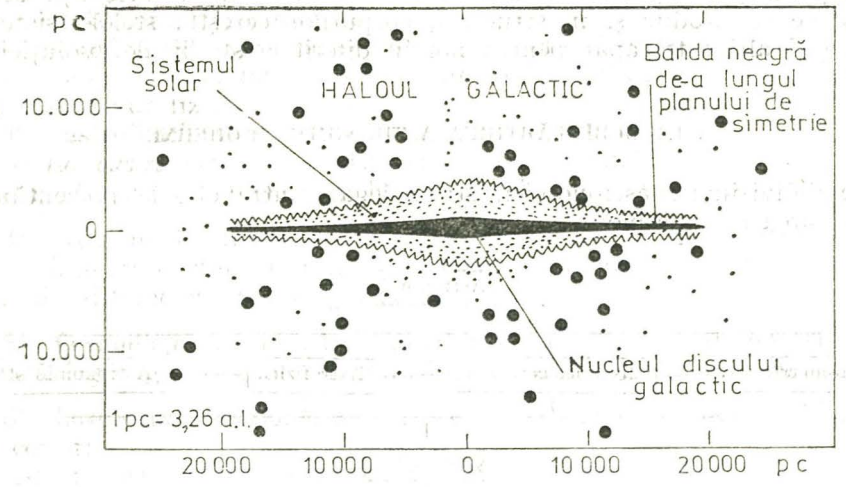


Fig. 1.2. Galaxia văzută din profil.

la o distanţă de 2 000 000 a.l. *Hubble* găseşte că toate acestea se îndepărtează de noi cu o viteză radială proporţională cu distanţa.

(4) *Telescopul de la Mount Palomar* (S.U.A.), cu diametrul $D = 5{,}08$ *m (1950)*, cu suprafaţa sa receptoare de zeci de metri pătraţi, ne-a oferit:

— descoperirea numărului mare (peste 10^{10}) de galaxii, într-un spaţiu cu raza de $5 \cdot 10^9$ a.l., distanţele dintre ele fiind în medie de $1{,}5 \cdot 10^6$ a.l., conţinînd fiecare între 10^7 — 10^{12} stele într-un diametru ce ajunge pînă la 200 000 a.l.;

— distribuţia galaxiilor în grupuri (conţinînd mai puţin de 20 de galaxii) şi roiuri de galaxii; astfel apare *a treia unitate a materiei extraterestre: roiul de galaxii*;

— punerea în evidenţă a existenţei materiei intergalactice.

Noi descoperiri se aşteaptă de la telescopul din Munţii Caucaz (Zelenciuk, U.R.S.S.), cu diametrul $D = 6$ m, cel mai mare telescop din lume, care a fost pus în funcţiune în ultimii ani.

3°. **Radiotelescoapele,** cu suprafeţele lor de ordinul sutelor de metri pătraţi, pe baza undelor radio recepţionate:

— au stabilit existenţa radiosurselor galactice şi extragalactice;

— au triplat raza părţii accesibile a Universului, a materiei observabile: $15 \cdot 10^9$ a.l.

Cel mai mare radiotelescop cu antenă parabolică orientabilă, avînd $D = 100$ m, se află la Institutul „Max Planck" din Bonn (R.F.G.), iar cel mai mare radioreflector fix, situat într-un crater vulcanic şi avînd $D = 305$ m, — la Arecibo (Puerto Rico).

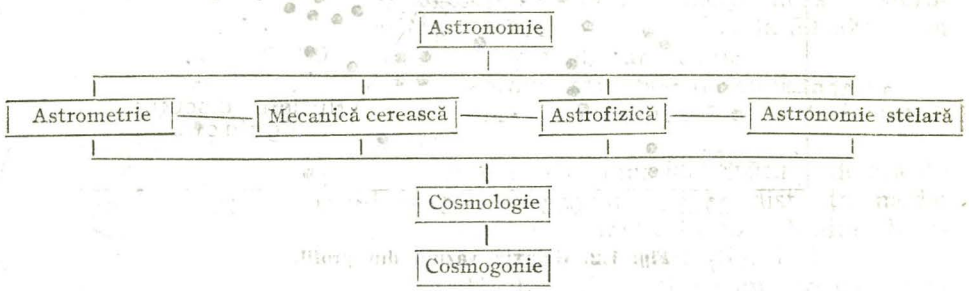
Fără a forma o unitate distinctă, dar spre a o deosebi de întregul din care face parte (Universul), totalitatea galaxiilor observate astăzi — materia observabilă — poartă denumirea de *Metagalaxie.*

În toate aceste sisteme stelare au loc *transformări şi mişcări continue.* Soarele, împreună cu corpurile din sistemul său, se mişcă aproximativ în direcţia stelei Vega, cu o viteză de 20 km/s, şi toate stelele, la rîndul lor, sînt într-o continuă mişcare. Pe lîngă mişcările stelelor, s-au descoperit mişcări ale grupurilor de stele în ansamblul lor, rotaţia întregii Galaxii şi,

în sfîrşit, mişcarea galaxiilor. Cercetările astrofizice pun în evidenţă schimbările ce se produc şi în structura corpurilor cereşti: stelele, sistemele stelare şi alţi aştri apar pentru noi în diferitele stadii ale evoluţiei lor.

§ 1.4. SUBÎMPĂRŢIREA ASTRONOMIEI MODERNE

Subdiviziunile astronomiei, strîns legate între ele, le prezentăm în următoarea schemă-bloc:



1°. **Astrometria** este cea mai veche ramură (de peste 2000 de ani), cu trei mari capitole:

— *astronomia de poziţie (sau sferică)* se ocupă cu metodele matematice pentru determinarea poziţiilor aparente ale aştrilor pe sfera cerească, a distanţelor unghiulare dintre ei, a dimensiunilor lor, cu teoria determinării precise a timpului, precum şi cu metodele pentru eliminarea influenţei exercitate de diferite fenomene asupra observaţiilor (refracţia astronomică, mişcările Pămîntului etc.);

— *astronomia practică* se ocupă cu descrierea instrumentelor astronomice, cu metodele pentru corectarea erorilor de observaţie, cu elaborarea metodelor de observaţie şi de determinare a timpului, a coordonatelor diferitelor puncte de pe suprafaţa Pămîntului etc.;

— *astronomia fundamentală* are ca principală sarcină construirea *sistemului fundamental de coordonate pe sfera cerească*, sarcină care se realizează sub forma catalogului fundamental de poziţii precise şi mişcări proprii ale unui număr de stele faţă de care se determină apoi poziţiile celorlalte stele.

2°. **Mecanica cerească** studiază mişcarea corpurilor cereşti sub acţiunea diferitelor forţe — gravifice, de rezistenţă etc. —, se ocupă cu determinarea maselor corpurilor cereşti, a figurilor lor de echilibru etc. Capitolul mecanicii cereşti care cuprinde metodele de determinare a orbitelor corpurilor sistemului solar folosind datele de observaţii, precum şi metodele de calcul al poziţiilor aparente ale acestor corpuri după mişcarea lor reală, poartă denumirea de *astronomie teoretică*. Noul capitol al mecanicii cereşti care se ocupă cu problemele legate de mişcarea corpurilor cereşti artificiale se numeşte *cosmonautică* sau *astrodinamică* (sau *mecanică cerească aplicată* etc.).

3°. **Astrofizica** se ocupă cu structura, compoziţia chimică, condiţiile fizice şi procesele ce se desfăşoară în corpurile cereşti, cu problemele privitoare la sursele de energie ale Soarelui şi ale stelelor etc. Ea datează

de la descoperirea analizei spectrale (1859) și este o aplicație a legilor fizicii și chimiei la corpurile cerești. Se împarte în:

— *astrofizica practică*, care elaborează metode de observații astrofizice;

— *astrofizica teoretică*, care interpretează rezultatele observațiilor pe baza realizărilor fizicii teoretice.

Tot astrofizicii aparține și:

— *radioastronomia*, care studiază radioemisiunile corpurilor cerești și ale mediului interstelar și aplică metodele radiolocației în astronomie.

4°. **Astronomia stelară** se ocupă cu studiul legilor distribuției, structurii și mișcărilor stelelor, roiurilor stelare și nebuloaselor din Galaxie, ca și ale sistemelor stelare (galaxiilor).

5°. **Cosmologia**, ca un corolar al tuturor cunoștințelor despre Univers, studiază legile generale ale structurii părții din Univers accesibilă nouă.

6°. **Cosmogonia** elaborează teorii asupra formării și evoluției corpurilor cerești.

Astronomia modernă poate fi împărțită și în alte moduri. După receptorii de radiații și metodele de investigație, vorbim despre: *astronomia optică* (care folosește „fereastra" optică din atmosferă), *radioastronomia* (care își dobîndește informațiile prin „fereastra" radio a atmosferei), *astronomia neutrinică*, *astronomia spațială* etc.

După obiectele studiate, vorbim despre: *astronomia sistemului solar*, *astronomia stelară* (aici astronomia stelelor și nebuloaselor Galaxiei noastre) și *astronomia extragalactică*.

Cea mai nouă ramură a astronomiei, instituită la cea de-a XVIII-a Adunare Generală a Uniunii Astronomice Internaționale (Patras, Grecia, 1982), este *bioastronomia*, care are drept menire să cerceteze posibilitățile existenței vieții extraterestre.

§ 1.5. COORDONAREA CERCETĂRILOR ASTRONOMICE ȘI SPAȚIALE PE PLAN MONDIAL

Uniunea științifică internațională de astronomie s-a înființat în anul 1919, sub denumirea de *Uniunea Astronomică Internațională* (UAI sau IAU — International Astronomical Union). Ea a apărut ca urmare a necesității coordonării cercetărilor astronomilor din diferite țări ale lumii. La această organizație au aderat pînă în prezent 49 de țări și aproximativ 5200 de membri individuali*; dintre aceste țări face parte și România, prin Comitetul Național Român de Astronomie, înființat în anul 1924.

Caracterul și activitatea științifică ale Uniunii sînt reflectate în lucrările celor peste 40 de comisii ale sale, create pe diferite specialități și probleme. Activitatea UAI se concretizează în: adunări generale (din trei în trei ani), adunări regionale (anual), simpozioane și colocvii de specialitate, toate urmate de publicarea în volume a comunicărilor și dezbaterilor. De asemenea, comisiile UAI organizează diferite programe comune de cercetări, schimburi de specialiști, școli de vară pentru tineri astronomi etc.

Pentru coordonarea programelor de cooperare privind cercetarea spațiului cosmic cu ajutorul navelor cosmice și sateliților artificiali, a luat ființă în anul 1958 *Comitetul pentru Cercetări Spațiale* (Committee on Space

* IAU Information Bulletin 49, January 1983.

Research, COSPAR). Țara noastră a aderat la acest Comitet prin Comisia Română pentru Activități Spațiale, din anul 1964. Avînd o structură de organizare și de activități asemănătoare cu cea a UAI (ținînd, însă, adunări din doi în doi ani), COSPAR se ocupă cu problemele științifice ale explorării Cosmosului și cu aplicațiile acestora în meteorologie, telecomunicații, oceanologie, geodezie, geofizică, teledetecția resurselor terestre etc.*

*

Astronomia este una dintre cele mai vechi științe. Ea s-a născut și s-a dezvoltat din necesitatea atît a cunoașterii, cît și a practicii umane. Fiind inter- și pluridisciplinară, astronomia este o ramură atît fundamentală, cît și aplicativă, o ramură de sinteză a științei. O interesantă prezentare a evoluției astronomiei de-a lungul veacurilor pînă în prezent, împletită cu viața societății, se poate găsi în lucrarea *Cerul — o taină descifrată (Astronomia în viața societății)*, apărută în Editura Albatros, București, 1982. (Autori: acad. N. Teodorescu și prof. dr. doc. Gh. Chiș).

* COSPAR Information Bulletin 95, December 1982.

CAPITOLUL II

ASTRONOMIA SFERICĂ

§ 2.1. SFERA CEREASCĂ: ROTAȚIA, PUNCTELE, PLANELE ȘI LINIILE EI FUNDAMENTALE

1°. **Sfera cerească.** Dacă într-o noapte senină privim cerul înstelat, vedem deasupra noastră o imensă boltă de forma unei calote sferice. Aceasta intersectează suprafața terestră după o linie neregulată, numită *orizont fizic.*

Acest fenomen nu este decît *o aparență.* În realitate, toți aștrii se află la cele mai diferite distanțe de noi; ochiul nostru neputînd însă stabili o diferență între acestea, aștrii par dispuși la distanțe egale, adică pe o suprafață sferică.

A doua aparență este că stelele nu-și schimbă poziția relativă (una față de alta), de unde gruparea lor, după aparențe, în *constelații.* Printr-o convenție internațională s-a stabilit ca întreaga sferă cerească să fie împărțită în 88 de constelații (Anexa 2), în interiorul lor stelele purtînd nume proprii (stelele cele mai strălucitoare), apoi litere ale alfabetului grecesc, iar cele mai puțin strălucitoare — numere de ordine.

Privind cerul înstelat, vedem stelele răsărind, apoi culminînd și apunînd, în mod periodic, de unde sîntem conduși la *aparența că cerul,* în întregimea lui, *se rotește* de la răsărit spre apus, cu o perioadă de $23^h56^{min}04^s,1$ timp mediu *(ziua siderală).* Numai steaua α Ursae Minoris, numită *Polară,* pare nemișcată. Întorcîndu-ne cu fața spre Steaua Polară, observăm că stelele se mișcă de la răsărit spre apus, în sensul contrar mersului acelor ceasornicului. Acest sens al *mișcării aparente diurne* este *sensul retrograd* (fig. 2.1). Cauza adevărată a acestui fenomen aparent este, după cum se știe, mișcarea reală de rotație a Pămîntului, cu aceeași perioadă în sensul contrar, numit *sens direct.* Admitem aici uniformitatea mișcării de rotație a Pămîntului.

Putem avea o imagine a mișcării diurne aparente fotografiind cerul cu o placă centrată pe Polară, cu o expunere de aproximativ o oră. Vom vedea pe placă dîrele de stele în mișcarea lor diurnă, dîre cu atît mai lungi cu cît steaua este mai departe de Polară.

Deși, în realitate, nu există nici o suprafață sferică împreună cu care toți aștrii să efectueze această mișcare diurnă, în astronomie se utilizează totuși noțiunea de *sferă cerească,* fiind un auxiliar important la determinarea pozițiilor și mișcărilor aparente ale aștrilor. Se numește *sferă cerească* o sferă imaginară, cu raza arbitrară, avînd centrul într-un punct arbitrar al spațiului, pe a cărei suprafață se trec pozițiile aștrilor așa cum se văd ei pe cer, la un moment dat, din punctul considerat al spațiului.

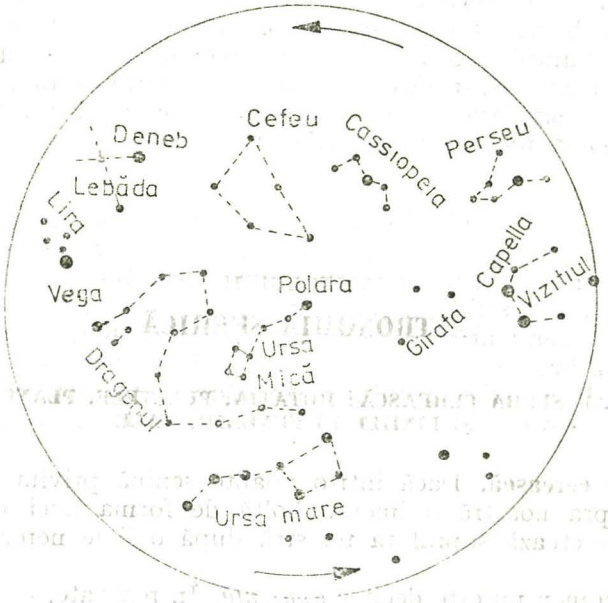


Fig. 2.1. Constelațiile din vecinătatea Polarei.

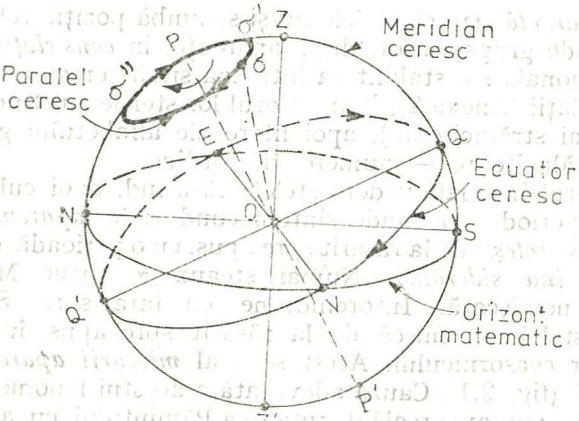


Fig. 2.2. Sfera cerească.

Este comod să considerăm drept *centru al sferei cereşti ochiul observatorului* (O) (sfera cerească topocentrică, fig. 2.2). În acest caz, fiecărei drepte care porneşte de la ochi spre un astru de pe cer îi corespunde un anumit punct (σ) : proiecţia acestui astru pe sfera cerească. Poziţia aparentă relativă a aştrilor o determinăm cu ajutorul unghiurilor dintre direcţiile aştrilor sau cu ajutorul arcelor de cerc mare de pe sfera cerească dintre proiecţiile aştrilor. *Rotaţia sferei cereşti,* conform definiţiei, *este analogă cu rotaţia diurnă a cerului.*

Pentru a determina poziţiile aştrilor pe sfera cerească, trebuie să stabilim *punctele, liniile şi planele ei principale.*

În urma fotografierii regiunii Polarei, putem determina două puncte pe sfera cerească neafectate de mişcarea diurnă. Aceste puncte sînt diametral opuse şi se numesc *polii lumii* (sau *polii cereşti*). Polul în jurul căruia — privindu-l în faţă — vedem mişcarea diurnă efectuîndu-se în sens trigonometric pozitiv este *Polul Nord* (*P*), iar punctul diametral opus este *Polul Sud* (*P'*). Distanţa unghiulară a Polarei de la Polul Nord ceresc este în prezent mai mică decît 1°. Diametrul care uneşte cei doi poli se numeşte *axa lumii* (*PP'*), adică axa de rotaţie a sferei cereşti (topocentrice) este paralelă cu axa de rotaţie a Pămîntului. (În cazul *sferei cereşti geocentrice* cele două axe coincid.)

Direcţia firului cu plumb într-un loc dat este *verticala locului* (*ZZ'*). Punctele de intersecţie a verticalei locului cu sfera cerească se numesc: *zenit* (*Z*) — punctul de deasupra capului observatorului şi *nadir* (*Z'*) — punctul diametral opus.

Planul dus prin centrul sferei cereşti perpendicular pe verticala locului este *planul orizontal*. El taie sfera cerească după un cerc mare numit *orizontul matematic* sau *orizontul „adevărat"* (*NESV*).

Planul dus prin centrul sferei cereşti perpendicular pe axa lumii se numeşte *planul ecuatorului ceresc*. El taie sfera cerească după un cerc mare numit *ecuatorul ceresc* (*QVQ'E*), care împarte sfera cerească în două emisfere: emisfera boreală (nordică) şi emisfera australă (sudică). Orizontul matematic şi ecuatorul ceresc (topocentric) se intersectează în două puncte care — cum se poate vedea uşor — sînt punctele cardinale est (*E*) şi vest (*V*).

Cele două drepte, axa lumii şi verticala locului, determină un plan numit *planul meridian* al locului. El taie sfera cerească după un cerc mare numit *meridian ceresc* (*PZQSP'Z'Q'N*), iar planul orizontului — după o linie numită *meridiana locului* (*NS*). Meridiana locului taie orizontul în două puncte: cel mai apropiat de Polul Nord este *punctul nord* (*N*) iar diametral opus lui este *punctul sud* (*S*). Pe orizont, la mijloc între cele două puncte — în dreapta observatorului întors cu faţa spre Polul Nord — este *punctul est* (*E*) şi diametral opus lui este *punctul vest* (*V*). Deci meridianul locului serveşte şi pentru orientarea într-un punct dat pe Pămînt.

Orice plan dus prin verticala locului se numeşte *plan vertical* şi taie sfera cerească după un *cerc* mare numit *vertical*. Planul vertical perpendicular pe planul meridian al locului determină *primul vertical*.

În mişcarea diurnă, fiecare stea (σ) descrie cîte un cerc mic, paralel cu ecuatorul ceresc, numit *paralel ceresc*. Paralelul ceresc are cu meridianul ceresc două puncte comune numite *culminaţii*. În *culminaţia superioară* (σ') steaua atinge înălţimea cea mai mare deasupra orizontului, iar în *culminaţia inferioară* (σ'') — înălţimea cea mai mică deasupra orizontului. Stelele la care vedem ambele culminaţii au întreg paralelul ceresc deasupra orizontului: acestea sînt *stelele circumpolare*; alte stele răsar, culminează şi apun — *stelele cu răsărit şi apus*.

2°. **Poziţia reciprocă a cercurilor şi punctelor sferei cereşti**, care au fost definite mai sus, depinde de direcţia verticalei locului, adică de poziţia observatorului pe suprafaţa Pămîntului (orientarea axei lumii fiind aceeaşi pentru toate punctele suprafeţei terestre).

Această dependenţă se traduce prin următoarea *relaţie fundamentală a latitudinii astronomice*, care rezultă direct din fig. 2.3: „înălţimea Polului

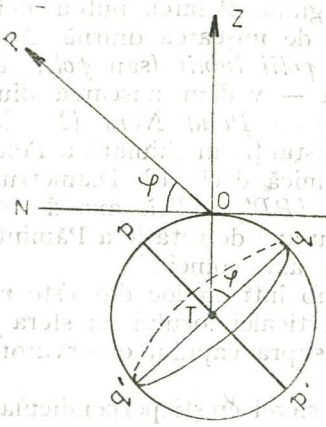


Fig. 2.3. Legătura dintre înălțimea polului ceresc și latitudinea astronomică.

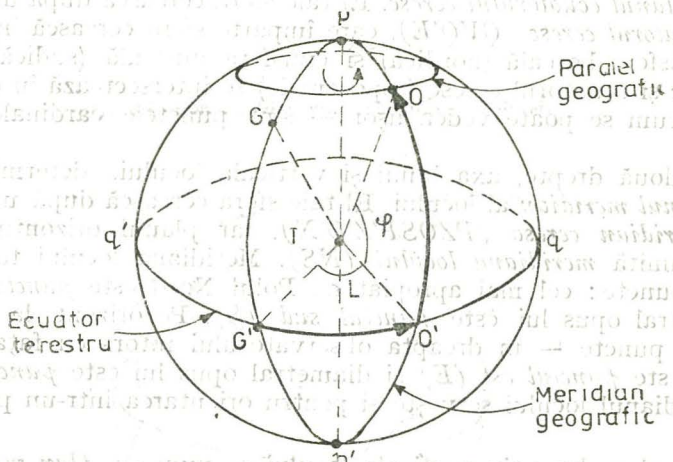


Fig.2.4. Coordonate geografice.

ceresc deasupra orizontului unui loc de pe suprafața Pământului este egală cu latitudinea astronomică a acestui loc".

În cazul Pământului sferic, latitudinea astronomică este aceeași cu latitudinea geografică — una din *coordonatele geografice* care determină poziția unui punct pe suprafața Pământului (fig. 2.4).

Latitudinea geografică (φ) a unui loc este unghiul format de planul ecuatorului terestru (qq') cu verticala locului (TO).

A doua coordonată pentru determinarea locului observatorului este unghiul format de meridianul inițial (meridianul Greenwich) cu meridianul locului, unghi numit *longitudine geografică* (L). Ea este vestică sau estică, după cum se măsoară spre vest, respectiv spre est, de la meridianul inițial; printr-o convenție, longitudinea estică se consideră pozitivă, iar cea vestică negativă.

După cum coordonatele geografice determină locul de observație pe suprafața terestră, la fel cu ajutorul coordonatelor cerești determinăm poziția unui punct pe sfera cerească. După necesitățile problemelor de astronomie, avem mai multe sisteme de coordonate cerești, dintre care în acest paragraf vom defini trei.

1°. **Sistemul de coordonate orizontale.** Pentru fiecare sistem de coordonate considerăm un plan, numit fundamental, care taie sfera cerească după un cerc mare (fundamental), și o axă fundamentală perpendiculară pe planul fundamental în centrul sferei cerești.

În sistemul de coordonate orizontale (locale sau zenitale), planul fundamental este planul orizontului matematic (*NESV*), iar axa fundamentală este verticala locului (*OZ*). Coordonatele orizontale ale unui astru σ sînt (fig. 2.5):

— *înălțimea deasupra orizontului* (*h*): unghiul format de direcția spre astru cu planul orizontului; se măsoară cu arcul cercului vertical al astrului, de la orizont spre astru. Adesea, în locul înălțimii — care este mai greu de măsurat, deoarece orizontul este puțin accesibil datorită formelor și acoperirilor de teren — se utilizează complementul ei, $z = 90° - h$, numit *distanță zenitală*: unghiul format de verticala locului cu raza vizuală spre astru. Cercul mic al sferei cerești ce trece prin astrul σ și al cărui plan este paralel cu planul orizontului matematic se numește *almucantaratul* astrului. Cealaltă coordonată orizontală este:

— *azimutul* (*A*): unghiul diedru format de planul meridianului ceresc cu planul vertical al astrului. Se măsoară cu arcul orizontului matematic cuprins între punctul sud (*S*) și punctul de intersecție (σ′) a cercului vertical al astrului cu orizontul matematic. El crește în sens retrograd de la 0° la 360°. Azimutul socotit de la punctul S se numește *azimut astronomic*, spre deosebire de *azimutul geodezic*, care se măsoară de la punctul *N* în același sens retrograd.

Coordonatele orizontale se determină cu ajutorul *teodolitului* sau *instrumentului universal*. Fiind legate de verticala și meridianul locului, coordonatele orizontale variază cu locul și momentul observației.

2°. **Sistemul de coordonate orare (semilocale).** Planul fundamental în acest sistem este planul ecuatorului ceresc (*QVQ′E*), iar axa fundamentală este axa lumii (*PP′*). Planul definit de axa lumii și astru se numește *planul orar* al astrului; el taie sfera cerească după un cerc mare numit *cercul orar* al astrului (sau *cercul de declinație*).

Coordonatele orare ale unui astru σ sînt (fig. 2.6):

— *declinația* (δ): unghiul format de raza corespunzătoare astrului cu

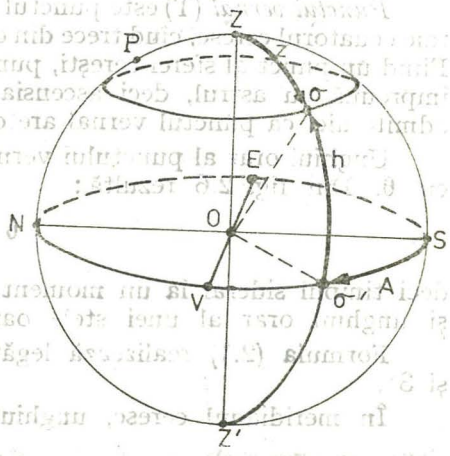


Fig. 2.5. Sistemul de coordonate orizontale.

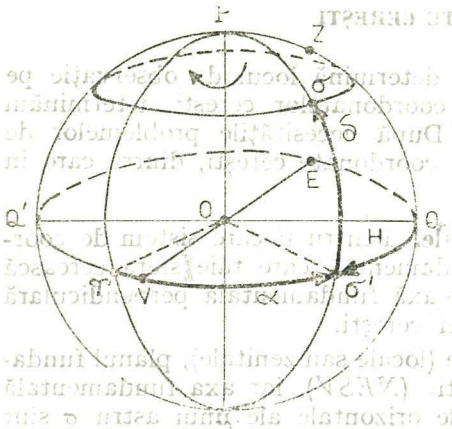


Fig. 2.6. Coordonate orare şi ecuatoriale.

planul ecuatorului ceresc; se măsoară prin arcul de cerc orar de la ecuatorul ceresc la astru şi variază între 0° şi ±90° (se consideră pozitivă în emisfera boreală). Uneori, în locul declinaţiei se foloseşte *distanţa polară* a astrului σ, notată cu $p = \widehat{P\sigma}$ şi legată de δ prin relaţia $p + \delta = 90°$; ea se socoteşte de la Polul Nord ceresc, putînd fi cuprinsă între 0° şi 180°. Astrul descriind în mişcarea sa diurnă un paralel ceresc, declinaţia şi distanţa sa polară nu variază cu mişcarea diurnă;

— *unghiul orar* (H): unghiul format de meridianul ceresc al locului cu cercul orar al astrului; se măsoară prin arcul de ecuator ceresc de la meridianul ceresc al locului pînă la cercul orar al astrului şi creşte cu timpul în mod uniform de la 0° la 360° (în sens retrograd). Această proprietate, foarte importantă, face ca unghiul orar să fie utilizat pentru măsurarea timpului (cap. V).

Coordonatele orare se măsoară cu ajutorul instrumentelor avînd *montură ecuatorială (ecuatorialul)*.

3°. **Coordonatele ecuatoriale** au acelaşi plan fundamental şi aceeaşi axă fundamentală ca şi cele orare. *Declinaţia* astrului (δ), fiind constantă, se păstrează, unghiul orar se înlocuieşte însă prin *ascensia dreaptă* (α) a stelei.

Se numeşte *ascensia dreaptă* (α) a unui astru unghiul format de planul orar al punctului vernal (Υ) cu planul orar al astrului şi se măsoară în sens direct de la 0° la 360° (sau de la 0^h la 24^h; ca şi unghiul orar, ascensia dreaptă se poate exprima şi în unităţi de timp echivalente: la 360° corespund 24^h etc.), prin arcul de ecuator ceresc, de la punctul vernal (Υ) la cercul orar (σ').

Punctul vernal (Υ) este punctul în care drumul anual aparent al Soarelui taie ecuatorul ceresc, cînd trece din emisfera australă în cea boreală (§ 2.4). Fiind un punct al sferei cereşti, punctul vernal participă la mişcarea diurnă împreună cu astrul, deci ascensia dreaptă a astrului este constantă. Se admite aici că punctul vernal are o poziţie fixă pe sfera cerească.

Unghiul orar al punctului vernal se numeşte *timp sideral* şi se notează cu θ. Din fig. 2.6 rezultă:

$$\theta = \alpha + H, \qquad (2.1)$$

deci timpul sideral la un moment dat este suma dintre ascensia dreaptă şi unghiul orar al unei stele oarecare.

Formula (2.1) realizează legătura între sistemele de coordonate 2°. şi 3°.

În meridianul ceresc, unghiul orar al astrului este zero, deci:

$$\theta = \alpha, \qquad (2.2)$$

relație care se utilizează:

— fie pentru *determinarea timpului sideral*, cînd ascensia astrului ce trece prin planul meridianului ceresc se cunoaște;

— fie pentru *determinarea ascensiilor drepte* ale aștrilor, cînd timpul sideral se cunoaște.

Coordonatele ecuatoriale α *și* δ sînt utilizate la întocmirea *cataloagelor și hărților stelare.*

§ 2.3. RELAȚIILE DINTRE COORDONATELE GEOGRAFICE ȘI CELE CEREȘTI ÎN CAZUL TRECERILOR LA MERIDIANUL CERESC

În cazul trecerii astrului la meridianul ceresc, pe lîngă relația

$$\varphi = h_P \tag{2.3}$$

definită în §2.1, există și alte relații simple între φ, h_m (sau z_m) și δ.

Fie σ_1 un astru în meridianul ceresc al locului, în culminația superioară, la sud de zenit (fig. 2.7). Se vede imediat că:

$$\varphi = \delta + z_m, \tag{2.4}$$

unde φ este latitudinea locului, δ — declinația astrului, iar z_m — distanța zenitală măsurată în momentul trecerii astrului la meridianul ceresc al locului. Dacă astrul se află la nord de zenit (σ_2):

$$\varphi = \delta - z_m. \tag{2.5}$$

Pentru culminația inferioară (σ_3), după cum se poate vedea ușor, avem:

$$z_m = 180° - (\varphi + \delta) \tag{2.6}$$

Formulele (2.3) și (2.6) sînt utile pentru *determinarea latitudinii geografice* a locului de observație.

Observație. Pentru ca o stea să fie circumpolară, este necesar ca culminația sa inferioară să fie deasupra orizontului (fig. 2.7). Deoarece orizontul formează cu ecuatorul ceresc unghiul $90° - \varphi$, condiția circumpolarității este: $\delta \geqslant 90° - \varphi$.

La fel, $\delta \leqslant -(90° - \varphi)$ este condiția ca o stea să nu răsară. Deci *condiția ca o stea să fie circumpolară* (să nu apună sau să nu răsară) este:

$$|\delta| \geqslant 90° - \varphi, \tag{2.7}$$

iar *condiția ca o stea să fie cu răsărit și apus* este:

$$|\delta| \leqslant 90° - \varphi. \tag{2.8}$$

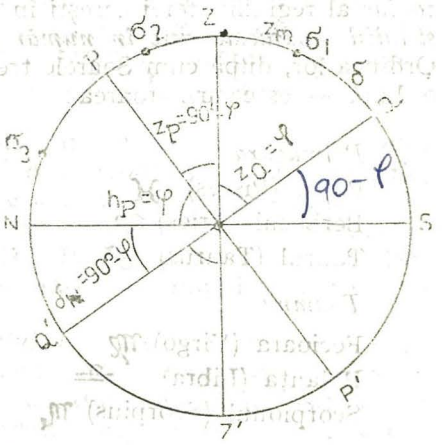


Fig. 2.7. Proiecția sferei cereș pe planul meridianului ceresc.ti

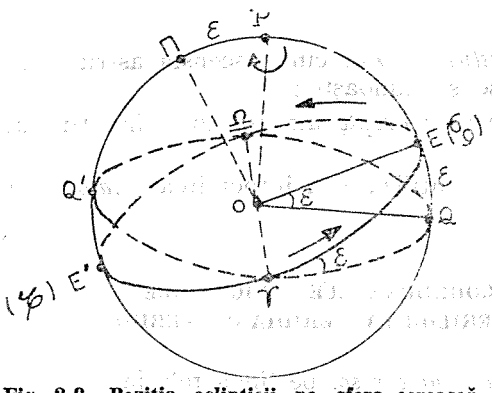


Fig. 2.8. Poziţia eclipticii pe sfera cerească.

Urmărind *aspectul cerului* în diferite luni ale anului, la aceeaşi oră noaptea, constatăm că el *se schimbă de la o lună la alta.* De exemplu, în fiecare lună, la orele 21, mereu alte stele culminează. *Variază şi înălţimea maximă a Soarelui deasupra orizontului* unui acelaşi loc de pe Pămînt. Aceste observaţii ne dovedesc că *Soarele,* pe lîngă mişcarea diurnă la care participă împreună cu toţi aştrii, *se deplasează şi printre stele,* executînd *în cursul anului un ocol complet* pe sfera cerească.

Dacă am determina zilnic coordonatele ecuatoriale ale centrului Soarelui, am obţine variaţia anuală aparentă a poziţiei Soarelui pe sfera cerească. Astfel, măsurînd în meridian distanţa zenitală a Soarelui, obţinem, după formula (2.4), declinaţia $\delta_\odot$, care *în timpul unui an* variază continuu între limitele $-23°27'$ şi $+23°27'$, în ambele sensuri, luînd de două ori valoarea zero.

Ascensia dreaptă a centrului Soarelui, $\alpha_\odot$, care se determină cu ajutorul stelelor care culminează la miezul nopţii, variază în timpul unui an între $0°-360°$ (sau 0^h-24^h), ceea ce înseamnă că în fiecare lună Soarele se deplasează printre stele în medie cu $30°$ (sau 2^h), iar în 24 de ore aproximativ cu $1°$ sau 4^{min}. În acest timp $\alpha_\odot$ creşte continuu, ceea ce înseamnă că Soarele se deplasează printre stele de la vest spre est.

Locul geometric al punctelor reprezentînd centrul Soarelui timp de un an este un cerc mare al sferei cereşti (EE'), al cărui plan este înclinat cu unghiul $\varepsilon = 23°27'$ pe planul ecuatorului ceresc. Acest cerc mare se numeşte *ecliptică* (fig. 2.8).

Pe cer ecliptica trece prin constelaţiile care din antichitate au primit, în majoritate, nume de animale (în greceşte „zoon"), de unde numele de *zodiac* al regiunii sferei cereşti în care sînt dispuse aceste constelaţii. *Constelaţiile zodiacale* sînt *în număr de 12,* ca şi *numărul lunilor într-un an.* Ordinea lor, după cum Soarele trece prin ele — în fiecare aflîndu-se circa o lună — este următoarea:

Primăvara
Peştii (Pisces) ♓
Berbecul (Aries) ♈
Taurul (Taurus) ♉

Vara
Gemenii (Gemini) ♊
Racul (Cancer) ♋
Leul (Leo) ♌

Toamna
Fecioara (Virgo) ♍
Balanţa (Libra) ♎
Scorpionul (Scorpius) ♏

Iarna
Săgetătorul (Sagittarius) ♐
Capricornul (Capricornus) ♑
Vărsătorul (Aquarius) ♒

Constelaţia în care se află Soarele la un moment dat nu este accesibilă observaţiilor, ci se vede partea diametral opusă a zodiacului. Astfel,

pe cer, *noaptea*, constelațiile Peștii, Berbecul și Taurul se văd toamna, constelațiile Gemenii, Racul și Leul — iarna etc.

Ecliptica taie ecuatorul ceresc în două puncte diametral opuse, numite *punctele echinocțiilor* (sau echinocțiale) : *punctul vernal* (♈), în care Soarele se află la 21 martie, trecînd din emisfera australă în cea boreală ($\alpha_\odot = 0^h$, $\delta_\odot = 0°$), și *punctul autumnal* (♎), în care Soarele se află la 23 septembrie, trecînd din emisfera boreală în cea australă ($\alpha_\odot = 12^h$, $\delta_\odot = 0°$).

Denumirea de *echinocțiu* (sau *echinox*) provine din faptul că, atunci cînd Soarele se află în unul din punctele echinocțiale ♈ și ♎, o jumătate a drumului său diurn este situată deasupra orizontului, iar cealaltă jumătate sub orizont și, deci, durata zilei este egală cu cea a nopții.

Punctul vernal este situat aproximativ pe dreapta ce trece prin Polară și steaua Chaph (β Cassiopeiae). Cu toate că punctul vernal se află în prezent în constelația Peștilor, i s-a păstrat totuși semnul constelației Berbecului, în care acest punct s-a aflat în antichitate, cînd au fost introduse semnele constelațiilor zodiacale. (Asupra deplasării punctului vernal se va reveni mai jos, în 2.6). Punctul diametral opus — punctul autumnal, care se notează cu semnul constelației Balanța, în care se afla înainte acest punct, se găsește în prezent în constelația vecină, Fecioara.

Alte două puncte importante ale eclipticii sînt punctele unde declinația Soarelui ia valorile extreme, puncte numite *solstiții* : *punctul solstițiului de vară* ($\alpha_\odot = 6^h$, $\delta_\odot = +23°27'$), unde declinația este maximă, și *punctul solstițiului de iarnă* ($\alpha_\odot = 18^h$, $\delta_\odot = -23°27'$), unde declinația Soarelui este minimă.

Denumirea de *solstițiu* provine de la faptul că, în apropierea punctelor solstițiale, Soarele, mișcîndu-se pe ecliptică aproape paralel cu ecuatorul ceresc, pare că stă pe loc cîteva zile, avînd la meridian aceeași înălțime.

Punctele principale împart ecliptica în patru arce egale, timpul necesar Soarelui pentru a parcurge fiecare arc fiind *anotimpul*. Momentele de trecere a centrului discului Soarelui prin punctele echinocțiale și solstițiale se consideră ca început al anotimpurilor respective.

Observație. Datele calendaristice mai sus menționate nu corespund întotdeauna punctelor principale, acestea putînd cădea și în zilele vecine (ziua precedentă sau cea următoare). Aceasta se explică prin modul în care se face împărțirea timpului după calendarul nostru, durata anului calendaristic nefiind întocmai egală cu intervalul dintre două treceri consecutive ale Soarelui prin punctul vernal (anii calendaristici putînd fi de 365 și de 366 de zile ; cap. V).

Am descris în linii mari fenomenele mișcării aparente a Soarelui *pentru o latitudine mijlocie din emisfera nordică a Pămîntului*. Se pot descrie, de asemenea, fenomenele mișcării aparente a Soarelui pentru latitudinile critice $\varphi = 0°$, $+23°,5$, $+66°,5$ și $+90°$ din emisfera boreală. Fenomene asemănătoare au loc și în emisfera australă a Pămîntului, cu singura deosebire că, în timpul verii noastre, acolo este iarnă, în timpul primăverii — toamnă etc.

Fenomenele mișcării aparente a Soarelui se explică în întregime *prin două mișcări în spațiu ale Pămîntului*, socotit drept corp rigid : *mișcarea de rotație* în jurul axei sale și *mișcarea de* translație (numită în astronomie mișcare de *revoluție*) în jurul Soarelui. Aceste mișcări se execută astfel încît axa de rotație rămîne înclinată față de planul orbitei Pămîntului cu un unghi de 66°33', deplasîndu-se paralel cu ea însăși (dacă se negli-

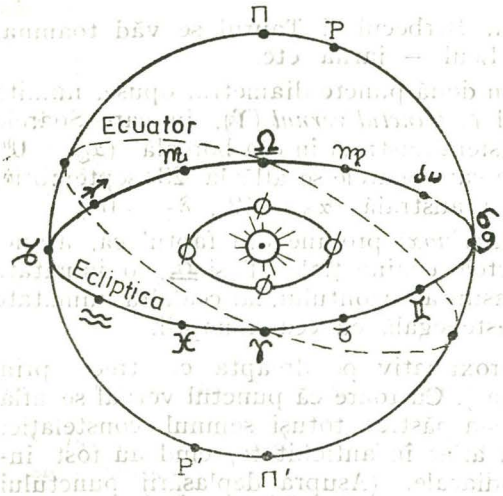


Fig. 2.9. Mişcarea Pământului „văzută" din Soare

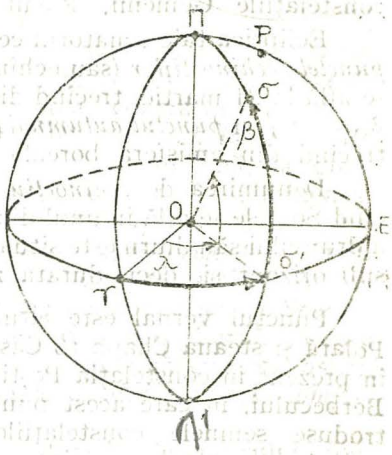


Fig. 2.10. Sistemul de coordonate ecliptice.

jează micile deplasări ce sînt condiţionate de retrogradarea punctului vernal; § 2.6). Înseamnă că planul ecuatorului este înclinat pe planul orbitei Pământului cu un unghi de $90° - 66°33' = 23°27'$. La fel cum ecuatorul ceresc este intersecţia planului ecuatorului terestru cu sfera cerească, aşa şi *ecliptica* este intersecţia cu această sferă a planului orbitei Pământului. De aceea, pe sfera cerească, planul eclipticii formează cu planul ecuatorului ceresc un unghi de $23°27'$.

Pentru un observator imaginat în Soare, mişcarea Pământului se efectuează exact la fel cum se produce mişcarea Soarelui pentru noi. Pământul (care de la distanţa Soarelui s-ar vedea ca o stea suficient de strălucitoare) se va mişca pe ecliptică în acelaşi sens şi cu aceeaşi viteză cu care se mişcă faţă de noi Soarele. Dar acest observator imaginar vede Pământul în punctul eclipticii care este diametral opus punctului în care vedem noi Soarele la momentul dat (fig. 2.9).

§ 2.5. SISTEMUL DE COORDONATE ECLIPTICE

Cel de-al patrulea sistem de coordonate cereşti are ca plan fundamental planul eclipticii ($E\Upsilon E'$) şi ca axă fundamentală axa polilor ecliptici (perpendiculară în centrul sferei cereşti pe planul eclipticii) ($\Pi\Pi'$). Ea are cu sfera cerească două puncte de intersecţie, numite *polii ecliptici* (Π şi Π'). Cercul mare dus prin polii Π, Π' şi astru este *cercul latitudinilor* (sau *meridianul ecliptic*) al astrului.

Coordonatele ecliptice ale unui astru σ sînt (fig. 2.10):

— *latitudinea ecliptică* (β): unghiul format de raza corespunzătoare astrului cu planul eclipticii. Este măsurată prin arcul de cerc de latitudine, de la ecliptică la astru. Este pozitivă de la ecliptică spre polul nord Π şi negativă de la ecliptică spre polul sud Π';

— *longitudinea ecliptică* (λ): unghiul măsurat, în sens direct, prin arcul eclipticii, de la cercul de latitudine al punctului vernal Υ la cercul de latitudine al astrului. Se exprimă în grade (de la 0° la 360°).

Coordonatele ecliptice nu depind de rotația sferei cerești. Ele nu se măsoară cu instrumente, ci *se deduc prin calcul din cele ecuatoriale*. Ele se utilizează mai ales *la studiul mișcării Lunii și planetelor*, care își execută mișcarea în apropierea eclipticii.

§ 2.6. ANUL TROPIC ȘI ANUL SIDERAL. PRECESIA ECHINOCȚIILOR

Timpul scurs între două treceri consecutive ale Soarelui la punctul vernal se numește *an tropic*. El are 365,2422 ... zile medii, adică 365 zile 5 h 48 min 46,045 s (Definiția zilei medii se va da în cap. V).

Astronomul grec *Hipparh* (190—125 î.e.n.), la întocmirea unui catalog de stele, a constatat că longitudinile ecliptice ale tuturor stelelor cresc în fiecare an cu 50″,2. Aceasta se explică prin faptul că punctul vernal se deplasează în sens retrograd cu 50″,2 pe an, ieșind în calea Soarelui, de unde numele de *precesie* dat acestui fenomen.

Consecințele precesiei sînt:

— Deplasîndu-se punctul vernal (sau autumnal), rezultă că planul ecuatorului, deci și polii cerești, se deplasează, descriind în timp de 26 000 de ani un cerc în jurul polului ecliptic (perioadă de timp denumită *an platonic*). Din acest motiv se produce o schimbare corespunzătoare (foarte lentă) a aspectului cerului.

— În timpul unui an tropic, Soarele nu execută o revoluție completă, ci un arc de 360°—50″,2. Timpul unei revoluții complete este *anul sideral* = 365,2564 zile medii = $365^d\ 06^h\ 09^m\ 09^s$, deci cu aproximativ 20^m mai lung decît anul tropic.

§ 2.7. EFECTELE MIȘCĂRII ANUALE APARENTE A SOARELUI

1°. **Anotimpurile.** Am văzut că axa de rotație diurnă a Pămîntului este înclinată cu 66°33′ (cu o mică variație) pe planul eclipticii și că în timpul mișcării de revoluție a Pămîntului ea se deplasează paralel cu ea însăși. De aici rezultă anotimpurile.

Durata anotimpurilor nu este egală, din cauză că orbita Pămîntului în jurul Soarelui este o elipsă, iar viteza de mișcare pe această orbită — neuniformă. Pămîntul se află cel mai aproape de Soare pe la 3 ianuarie (periheliu) și cel mai departe pe la 5 iulie (afeliu). Aceasta atenuează în foarte mică măsură asprimea iernii și arșița verii, însă nu joacă nici un rol în succesiunea generală a anotimpurilor.

2°. **Zonele climatice** de pe suprafața Pămîntului sînt datorate mișcării anuale a Soarelui. Se numesc *tropice* paralelele geografice aflate la latitudini geografice corespunzînd declinației celei mai mari și celei mai mici a Soarelui. *Tropicul Racului* corespunde la $\varphi = \delta_\odot = +23°27'$ și *tropicul Capricornului* la $\varphi = \delta_\odot = -23°27'$. *Cercurile polare* sînt paralelele corespunzînd la $\varphi = 90° - \varepsilon$ și $\varphi = 90° + \varepsilon$. Completarea figurii 2.4 cu aceste paralele o lăsăm pe seama cititorului.

Tropicele și cercurile polare determină *zonele climatice*, avînd următoarele *criterii astronomice*:

(1) *Zona ecuatorială* se întinde între cele două tropice. În această zonă Soarele este un astru cu răsărit şi apus şi de două ori pe an se află la zenitul fiecărei localităţi, cu excepţia tropicelor, unde culminaţia la zenit are loc o singură dată pe an. Deci razele solare cad aproape vertical, de unde încălzirea mare a regiunilor terestre din această zonă, care, din acest motiv, se mai numeşte şi *zonă caldă*. Zilele sînt aproape egale cu nopţile.

(2) *Zonele temperate* sînt cuprinse între tropice şi cercurile polare. Soarele răsare şi apune zilnic, zilele şi nopţile avînd lungimi diferite (sub 24 h), dar niciodată nu se găseşte la zenit. Zilele sînt mai lungi decît nopţile în timpul verii şi viceversa iarna.

(3) *Zonele reci sau regiunile polare* (Arctica şi Antarctica) sînt delimitate de cercurile polare. În aceste zone Soarele poate fi un astru ce nu răsare sau nu apune. Ziua polară, respectiv noaptea polară, pot avea durata de la 24 de ore pînă la 6 luni. Soarele în timpul zilei de vară ajunge la mici înălţimi deasupra orizontului (la pol, $h_{\odot\,max} = \varepsilon = 23°27'$), iar noaptea polară creşte pe măsura apropierii de pol.

3°. **Fenomenul zilelor şi nopţilor.** Aici înţelegem prin zi durata vizibilităţii Soarelui, iar prin noapte durata invizibilităţii lui. Prin fenomenul zilelor şi al nopţilor înţelegem *variaţia duratei zilei şi a nopţii timp de un an*, variaţie cauzată de mişcarea anuală şi de înclinarea axei de rotaţie a Pămîntului. Pe suprafaţa terestră acest fenomen variază cu latitudinea φ şi cu declinaţia $\delta_\odot$.

§ 2.8. COORDONATE GALACTICE

Un alt sistem de coordonate cereşti, mult folosit în studiul dinamicii stelare şi al structurii Galaxiei, este *sistemul galactic*.

Să considerăm planul median al Căii Lactee. Acesta taie sfera cerească după un cerc mare, numit *ecuator galactic* (*LL'*). Planul ecuatorului galactic împreună cu axa polilor galactici (*GG'*) (polul nord galactic *G* avînd coordonatele $\mathcal{A} = 12^h\ 40^{min}$ şi $\mathcal{D} = 28°{,}00$) formează sistemul galactic de referinţă. Faţă de acest sistem se definesc *coordonatele galactice* ale unui astru σ (fig. 2.11):

— *latitudinea galactică* (b) este unghiul format de raza corespunzătoare astrului cu planul ecuatorului galactic;

— *longitudinea galactică* (l) este unghiul pe care-l face cercul de latitudine galactică al astrului cu cercul de latitudine galactică al punctului de intersecţie a ecuatorului galactic cu ecuatorul ceresc Ω ($\alpha_\Omega = 18^h40^m$). Acest punct se numeşte *nodul ascendent al ecuatorului galactic*.

Polul galactic nord (G) este situat în constelaţia Părul Berenicei, iar polul galactic sud (G') — în constelaţia Sculptorul.

Observăm că, spre deosebire de coordonatele orizontale, ecuatoriale şi ecliptice, coordonatele galactice ale stelelor nu se determină cu precizie (de obicei, nu mai precis de 0°,1), lucru ce se explică prin faptul că aceste coordonate sînt folosite îndeosebi în lucrările de statistică stelară.

§ 2.9. TRANSFORMAREA COORDONATELOR CEREŞTI

Să considerăm sfera cerească şi să figurăm pe ea simultan două sisteme de coordonate: *sistemul orizontal şi sistemul orar*. Obţinem că meridianul ceresc, verticalul astrului σ şi cercul de declinaţie al astrului σ se între-

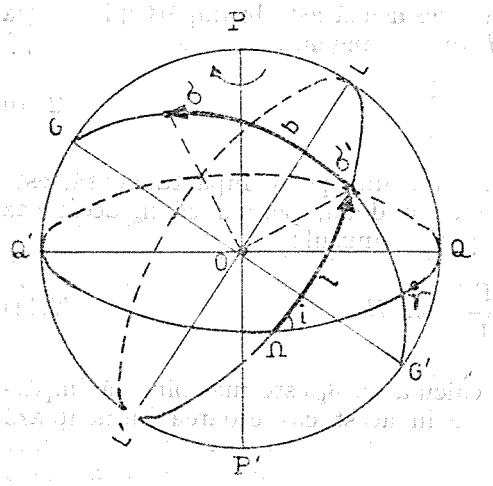


Fig. 2.11. Sistemul de coordonate galactice.

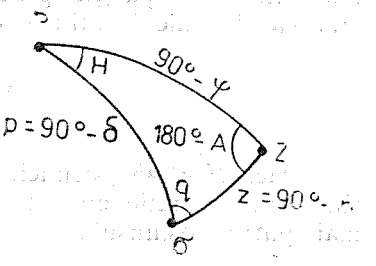


Fig. 2.12. Triunghiul paralactic (primul triunghi astronomic).

taie, formînd triunghiul sferic: zenitul Z, polul lumii P şi astrul σ (fig. 2.12). Acest triunghi se numeşte *triunghiul paralactic* sau *triunghiul de poziţie* (sau *primul triunghi astronomic*). Forma lui pentru acelaşi astru şi pentru acelaşi moment variază cu locul de observaţie, adică în funcţie de poziţia relativă a punctelor Z şi P.

Laturile acestui triunghi sînt: $\widehat{ZP} = 90° - \varphi$, $\widehat{Z\sigma} = z$, $\widehat{P\sigma} = 90° - \delta = p$, iar unghiurile lui sînt $\sphericalangle Z = 180° - A$, $\sphericalangle P = H$, $\sphericalangle \sigma = q$ *(unghi paralactic)*.

Se vede astfel că elementele triunghiului paralactic conţin atît coordonatele orizontale z şi A, cît şi coordonatele orare δ şi H.

Aplicînd *formulele lui Gauss* (Anexa 1) *la rezolvarea triunghiului paralactic*, obţinem relaţiile de trecere de la un sistem de coordonate la altul.

De exemplu, *transformarea coordonatelor orizontale* (z, A), *pentru un moment determinat, în coordonatele orare* (δ, H), *cunoscînd latitudinea geografică* φ *a locului de observaţie*, se efectuează astfel: Se aplică formulele lui Gauss ((1.2), Anexa 1) *pentru acele elemente ale triunghiului paralactic care conţin coordonatele necunoscute*, adică pentru latura $(90° - \delta)$ şi unghiul H. Avem:

$$\left.\begin{aligned} &\cos(90°-\delta)=\cos(90°-\varphi)\cos z+\sin(90°-\varphi)\sin z\cos(180°-A),\\ &\frac{\sin(90°-\delta)}{\sin(180°-A)}=\frac{\sin z}{\sin H},\\ &\sin(90°-\delta)\cos H=\sin(90°-\varphi)\cos z+\cos(90°-\varphi)\sin z\cos(180°-A) \end{aligned}\right\}$$

De aici, găsim:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta=\sin\varphi\cos z-\cos\varphi\sin z\cos A\equiv(\mathrm{I}),\\ &\cos\delta\sin H=\sin z\sin A\equiv(\mathrm{II}),\\ &\cos\delta\cos H=\cos\varphi\cos z+\sin\varphi\sin z\cos A\equiv(\mathrm{III}), \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

membrii doi ai acestor relaţii fiind cunoscuţi.

La *determinarea necunoscutelor* se procedează astfel: împărțind ecuația a doua cu a treia, se determină H după tangentă:

$$\operatorname{tg} H = \frac{(II)}{(III)} \tag{2.10}$$

Dacă $H > 45°$, atunci, pentru a determina pe δ după tangentă, este mai bine să împărțim prima ecuație cu a doua, pentru că în acest caz eroarea de calcul influențează mai puțin sinusul:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(I)}{(II)} \cdot \sin H \tag{2.11}$$

Dacă $H < 45°$, atunci, pentru a calcula pe δ, este mai bine să împărțim prima ecuație cu a treia, deoarece în acest caz eroarea influențează mai puțin cosinusul:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(I)}{(III)} \cdot \cos H \tag{2.12}$$

În cazul rezolvării problemei cu ajutorul tabelelor de logaritmi, *prima și a treia ecuație din (2.9) se transformă* în prealabil *în forme calculabile prin logaritmi*, cu ajutorul *metodei* cunoscute a *unghiului auxiliar* (formulele (1.13)—(1.18) din Anexa 1), după care urmează procedura de mai sus.

§ 2.10. CALCULUL TIMPULUI ȘI LOCULUI RĂSĂRITULUI ȘI APUSULUI AȘTRILOR

Este vorba de o altă problemă a astronomiei de poziție, care se rezolvă, de asemenea, *cu ajutorul formulelor fundamentale ale trigonometriei sferice.*

La răsărit și la apus, astrul se găsește la orizont, adică distanța sa zenitală $z = 90°$. Triunghiul paralactic corespunzător problemei (triunghiul $PZ\sigma$) este deci un *triunghi sferic rectilater.*

1°. **Calculul timpului răsăritului și apusului** se face prin aplicarea formulei cosinusului pentru latura $z = 90°$:

$$0 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H,$$

de unde găsim

$$\cos H = -\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi \tag{2.13}$$

Calculînd H după cosinus, obținem două valori: $H_1 = +H$, corespunzătoare apusului (avînd în vedere faptul că unghiul orar se socotește de la punctul sud (S) al meridianului ceresc spre punctul vest (V)), și $H_2 = -H$, corespunzătoare răsăritului. După aceasta, timpul sideral al răsăritului și apusului se obține din formula:

$$\theta_{\text{răs, ap}} = \alpha \mp H \tag{2.14}$$

Timpul răsăritului și apusului este afectat de *refracția atmosferică* și de *paralaxa geocentrică* (cap. IV).

2°. **Calculul locului răsăritului și apusului** se bazează pe formula cosinusului, aplicată pentru latura $(90° - \delta)$:

$$\sin \delta = -\cos \varphi \cos A,$$

$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \tag{2.15}$$

Această ecuație este satisfăcută pentru două valori: A și $360° - A$; prima valoare corespunde apusului, iar a doua răsăritului, din aceleași considerente ca și cele de mai sus.

Să scriem formulele (2.13) și (2.15) sub forma:

$$\cos H = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} (90° - \varphi)}, \quad \cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin (90° - \varphi)} \tag{2.16}$$

Întrucît cosinusul nu poate fi mai mare decît 1, aceste formule sînt satisfăcute numai cu condiția:

$$|\delta| \leqslant 90° - \varphi, \tag{2.17}$$

adică *condiția ca un astru să fie cu răsărit și cu apus* în locul de latitudine φ (condiție studiată în §2.3). Dacă *astrul este Soarele*, luînd valorile extreme ale declinației Soarelui, putem calcula aproximativ latitudinile extreme, unde sînt posibile *zilele și nopțile polare neîntrerupte*.

Pentru calculul *răsăritului și apusului Soarelui și Lunii*, care prezintă discuri aparente considerabile, în formulele de mai sus *se introduce cîte o corecție*. Astfel, pentru calculul aproximativ se ia $z = 90° + R'$, unde R' este *raza unghiulară a discului*, ceea ce se justifică prin faptul că coordonatele ecuatoriale sînt date pentru centrul discului, iar răsăritul și apusul corespund punctelor de tangență cu orizontul a marginii superioare a discului. Pentru Soare, de exemplu, $R' \simeq 16'$.

*

Problemele astronomiei sferice privind influența diferitelor fenomene asupra observațiilor de poziție și determinarea timpului, precum și problema astronomiei fundamentale privind întocmirea cataloagelor fundamentale vor fi prezentate în capitolele IV—V, în prealabil fiind necesare noțiuni și cunoștințe legate de structura și mișcările Pămîntului.

CAPITOLUL III

PĂMÎNTUL — CORP CERESC

§ 3.1. FORMA ŞI DIMENSIUNILE PĂMÎNTULUI. TRIANGULAŢIA

Din timpuri vechi s-a ajuns la concluzia că forma Pămîntului este apropiată de aceea a unei sfere. *Sfericitatea Pămîntului* este dovedită prin mai multe fapte, dintre care amintim:

— forma circulară a orizontului aparent şi creşterea razei lui cu altitudinea observatorului;

— variaţia înălţimii Polului lumii, dacă observatorul se deplasează, spre nord sau spre sud, de-a lungul unui meridian geografic (cu 1° la fiecare 111 km);

— forma circulară a umbrei Pămîntului pe discul Lunii în timpul eclipselor de Lună;

— fotografiile Pămîntului obţinute din Cosmos cu ajutorul rachetelor şi sateliţilor artificiali.

Sfericitatea Pămîntului permite *determinarea dimensiunilor lui* cu ajutorul următoarei *metode* simple, aplicată pentru prima dată de *Eratostene* (276—195 î.e.n.): fie O_1 şi O_2 două puncte ale globului terestru, situate pe acelaşi meridian geografic (fig. 3.1). Notînd cu l lungimea arcului de meridian $\overset{\frown}{O_1O_2}$ (în km, de exemplu), cu $n°$ valoarea unghiulară a acestui arc (în grade, de exemplu), iar cu R raza globului terestru, atunci rezultă uşor:

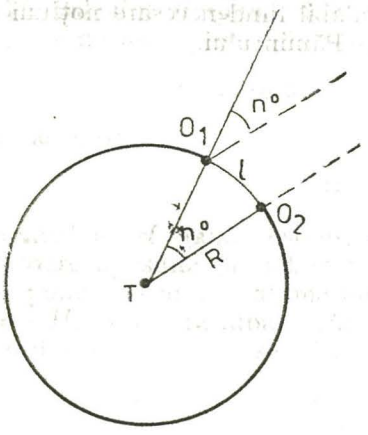


Fig. 3.1. Pentru determinarea razei globului terestru.

$$R = \frac{180° l}{\pi n°}, \qquad (3.1)$$

unde mărimea $n°$ este egală cu diferenţa latitudinilor geografice ale punctelor O_1 şi O_2, adică:

$$n° = \varphi_1 - \varphi_2 \qquad (3.2)$$

La determinarea mărimii $n°$, Eratostene a procedat astfel: ştia că în *oraşul Syena* (astăzi *Assuan*, situat în apropierea tropicului Racului) Soarele trece prin zenit, la amiază, în ziua solstiţiului de vară, astfel că fundul puţurilor adînci este iluminat de

razele sale şi obiectele verticale nu aruncă umbră. Pe de altă parte, el a stabilit că, în aceeaşi zi, în *oraşul Alexandria*, situat la nord de Syena, aproximativ pe acelaşi meridian, distanţa zenitală a Soarelui la amiază este egală cu 7°,2. De aici Eratostene a tras concluzia că diferenţa de latitudine a oraşelor Alexandria şi Syena este de 7°,2, adică 1/50 din 360°. Cunoscînd distanţa dintre aceste două oraşe, el găseşte lungimea meridianului respectiv şi raza sferei terestre.

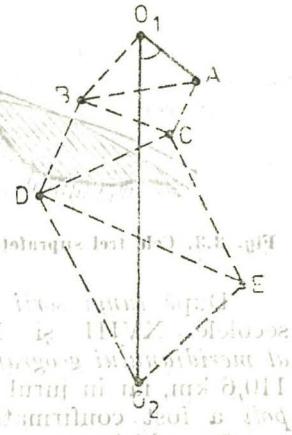


Fig. 3.2. Triangulaţia.

Astăzi determinarea precisă a latitudinilor geografice este o problemă de astrometrie relativ simplă.

Mult mai complicată este *determinarea distanţei liniare l dintre punctele* O_1 *şi* O_2. De obicei, între punctele O_1 şi O_2, situate la sute de kilometri unul de altul, se găsesc munţi, rîpe, rîuri, păduri şi alte obstacole naturale, care împiedică măsurarea directă a arcului $\widehat{O_1O_2}$. Pentru depăşirea acestei dificultăţi, *W. Snellius* aplică pentru prima dată, în 1615, o metodă indirectă, numită triangulaţie, şi determină lungimea arcului de meridian din Olanda.

Esenţa *metodei triangulaţiei* este următoarea: de ambele părţi ale arcului $\widehat{O_1O_2}$, a cărui lungime urmează a fi determinată, se aleg mai multe puncte A, B, C, ..., la distanţe de 30—40 km unul de altul (fig. 3.2). Punctele se aleg astfel ca din fiecare să fie vizibile cel puţin două puncte. În toate punctele se fac construcţii speciale, un fel de piramide, înalte de cîteva zeci de metri, numite *semnale geodezice*; instrumentul de măsurat unghiuri se instalează pe platforma lor superioară. O distanţă, de exemplu O_1A, se alege pentru măsurarea directă pe un teren perfect neted şi se consideră drept bază; de precizia cu care a fost măsurată baza depinde precizia determinării distanţei $l = \widehat{O_1O_2}$. Mai departe, se măsoară numai unghiurile din triunghiurile O_1AB, ABC, BCD, ... Cunoscînd în triunghiul O_1AB unghiurile şi una din laturi (baza O_1A), putem calcula şi celelalte două laturi O_1B şi AB ş.a.m.d. Cu alte cuvinte, cunoscînd în reţeaua de triunghiuri considerată numai o singură latură (baza) şi toate unghiurile, poate fi calculată lungimea liniei poligonale O_1BDO_2 (sau O_1ACEO_2). La aceste calcule se ţine seama, evident, de faptul că triunghiurile pe suprafaţa Pămîntului nu sînt plane, ci sferice. În sfîrşit, determinînd azimutul direcţiei laturii O_1A (sau O_1B), liniile poligonale de mai sus pot fi proiectate pe meridianul $\widehat{O_1O_2}$, adică se poate obţine lungimea arcului $\widehat{O_1O_2} = l$ în unităţi liniare.

În temeiul unor consideraţii teoretice bazate pe legea atracţiei universale, *Newton* a arătat că, în urma rotaţiei sale, Pămîntul, ca dealtfel toate planetele, trebuie să aibă forma de *sferoid, (elipsoid de revoluţie)*, turtit la poli. Se numeşte *turtirea* sferoidului raportul:

$$\varepsilon = \frac{a - b}{a}, \tag{3.3}$$

unde a — semiaxa ecuatorială şi b — semiaxa polară a sferoidului.

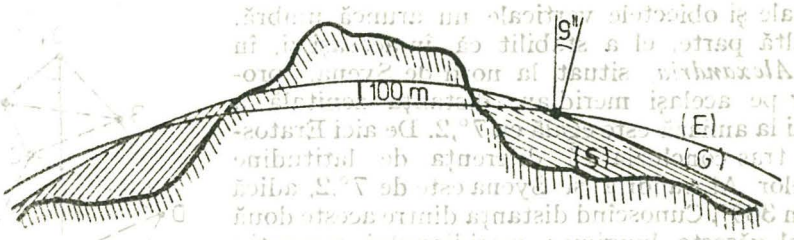


Fig. 3.3. Cele trei suprafeţe terestre: S— suprafaţa fizică; E — elipsoidul; G — geoidul.

După *lungi serii de măsurări graduale* efectuate în diferite ţări în secolele XVIII şi XIX, s-a dovedit că *lungimea arcului de 1° al meridianului geografic nu este aceeaşi*: în jurul ecuatorului este egală cu 110,6 km, iar în jurul polilor — cu 111,7 km. Astfel, *turtirea Pămîntului la poli* a fost confirmată de măsurările arcelor de meridian.

Deosebirile dintre elementele sferoidului terestru obţinute de diferiţi autori (Delambre, 1800; Bessel, 1841; Clark, 1880; Hayford, 1909; Krasovski şi Izotov, 1940) provin nu numai din erorile măsurărilor geodezice; aceste diferenţe se explică şi prin faptul că forma Pămîntului diferă de elipsoidul de revoluţie şi, prin urmare, poate fi vorba numai de *a alege elipsoidul a cărui formă diferă cel mai puţin de suprafaţa Pămîntului.*

În 1964, Uniunea Astronomică Internaţională a adoptat următoarele *valori ale elementelor elipsoidului terestru*:

$$a = 6378{,}16 \text{ km}, \quad b = 6356{,}78 \text{ km}, \quad \bar{\varepsilon} = 1 : 298{,}25, \qquad (3.4)$$

valori foarte apropiate de cele obţinute de Krasovski şi Izotov.

După multe încercări s-a ajuns la concluzia că forma adevărată a Pămîntului nu poate fi reprezentată exact prin nici una dintre suprafeţele matematice cunoscute. De aceea, vorbind despre forma Pămîntului, se are în vedere nu forma fizică a suprafeţei terestre, cu oceane şi continente, cu înălţimi şi depresiuni, ci aşa-numita *suprafaţă a geoidului.*

Se numeşte *geoid* acea *suprafaţă de nivel* (o suprafaţă la care normalele în orice punct al ei sînt verticale) a cărei parte vizibilă coincide cu suprafaţa neagitată a oceanelor; prelungind suprafaţa oceanelor sub continente (cu condiţia pusă), obţinem suprafaţa întregului geoid. Suprafaţa geoidului diferă puţin de suprafaţa elipsoidului terestru: diferenţa nivelurilor întrece numai în puţine puncte 100 m, iar unghiul normalelor rareori depăşeşte 9'' (fig. 3.3).

Deosebim deci *trei suprafeţe ale Pămîntului*:

— *suprafaţa fizică*, aşa cum ne apare cu formele de relief; pe ea se fac măsurările terestre;

— *suprafaţa hidrostatică sau geoidul*, suprafaţa oceanelor prelungită pe sub continente; la ea se reduc măsurările terestre;

— *suprafaţa matematică de referinţă*, adică *suprafaţa elipsoidului terestru*; pe ea se reprezintă măsurările terestre.

Problema determinării formei şi dimensiunilor exacte ale Pămîntului se rezolvă astăzi prin măsurări geodezice pe suprafaţa Pămîntului *(geodezia superioară)*, prin studiul mişcării sateliţilor artificiali ai Pămîntului *(geodezia cosmică)* şi prin determinarea forţei de gravitaţie la suprafaţa Pămîntului *(gravimetrie)*.

Față de cazul aproximației sferice a Pământului, pentru care am definit latitudinea geografică (cap. II), în *cazul Pământului elipsoidal* se pot defini *trei latitudini geografice diferite* (longitudinea rămînînd neschimbată) (fig. 3.4):

— *latitudinea astronomică* ($\varphi = \sphericalangle OT_1q$), care este unghiul dintre direcția verticalei punctului considerat (O) și planul ecuatorului terestru ($q'q$);

— *latitudinea geocentrică* ($\varphi' = \sphericalangle OTq$), care este unghiul dintre raza vectoare a punctului O și același plan al ecuatorului terestru;

— *latitudinea geodezică* ($\varphi_1 = \sphericalangle OT_2q$), care este unghiul dintre normala la elipsoid în punctul considerat și planul ecuatorului terestru.

Direct din observații astronomice se determină numai *latitudinea astronomică* φ. Din măsurări geodezice și gravimetrice se determină *deviația verticalei* (de la normala la elipsoid) în punctul considerat, care face posibilă obținerea unghiului φ_1 din φ. Această deviație, cauzată de neuniformitatea distribuirii maselor în interiorul Pământului, nu depășește în general 3″; în probleme de astronomie această diferență se neglijează și deci nu se face distincție între cele două latitudini ($\varphi_1 \simeq \varphi$).

Latitudinile astronomică și geocentrică pot diferi între ele cu cel mult 11′40″. Cu o precizie suficientă pentru practică, *această diferență poate fi reprezentată prin formula*:

$$(\varphi - \varphi')'' = \frac{1}{2} \cdot 206264{,}8\ e^2 \sin 2\varphi, \tag{3.5}$$

unde e este excentricitatea meridianului terestru.

Această formulă se stabilește astfel. Plecînd de la ecuația implicită a *elipsei meridiane* (elipsă cuprinsă între două cercuri concentrice tangente, unul exterior cu raza a și altul interior cu raza b; fig. 3.4):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \tag{3.6}$$

prin diferențiere obținem:

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \tag{3.7}$$

Considerînd că verticala locului este normală la elipsa meridiană ($\varphi_1 = \varphi$), avem: $\operatorname{tg}\varphi = -\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ (tangenta unghiului făcut de normala la elipsă cu axa Tx) și $\operatorname{tg}\varphi' = y/x$ (tangenta unghiului făcut de direcția TO cu axa Tx), de unde se obține:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi = (1-e^2)\operatorname{tg}\varphi \tag{3.8}$$

Rezultă că *elipsa meridiană* poate fi reprezentată parametric în

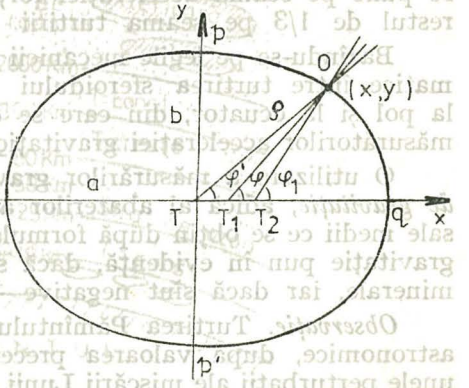


Fig. 3.4. Cele trei latitudini geografice.

funcție de φ prin ecuațiile:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad y = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{3.9}$$

Folosind formula $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')/(1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi')$ și relația (3.8), prin limitarea la primul termen din dezvoltarea în serie a funcției $1/(1 - e^2 \sin^2 \varphi)$ ($e^2 \simeq 0{,}00673$) și ținînd cont de faptul că diferența $(\varphi - \varphi')$ este un unghi mic, rezultă formula (3.5).

Pentru *lungimea arcului de meridian*, l, cuprins între punctele $O_1(\varphi_1)$ și $O_2(\varphi_2)$, din ecuațiile (3.9), după *formula lui Cauchy*, rezultă:

$$l = a(1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \tag{3.10}$$

ceea ce arată că arcele de meridian se exprimă prin integrale eliptice.

Observăm că unghiul $\Psi = (TO', Tx)$ se numește *latitudine excentrică* a punctului O și se exprimă, de asemenea, în funcție de φ.

§ 3.3. VARIAȚIA FORȚEI DE GRAVITAȚIE LA SUPRAFAȚA PĂMÎNTULUI ÎN FUNCȚIE DE LATITUDINE

Studiind problema formei Pămîntului în legătură cu rotația lui, *Newton* a demonstrat că forța de gravitație trebuie să se micșoreze continuu de la polii Pămîntului spre ecuator. S-a stabilit că valorile accelerației de gravitație pot fi reprezentate prin formula:

$$g_\varphi = g_0 + (g_{90} - g_0) \sin^2 \varphi, \tag{3.11}$$

unde valorile constantelor g_0 și g_{90} se determină din măsurări efectuate în cel puțin două puncte oarecare ale suprafeței terestre (prin rezolvarea a două sau mai multe ecuații de condiție de forma (3.11), cu două necunoscute, cu ajutorul *metodei celor mai mici pătrate*).

Diferența accelerației forței de gravitație la pol și la ecuator este: $g_{90} - g_0 = 983{,}2 - 978{,}0 = 5{,}2$ cm/s^2. Aproape 2/3 din această cantitate se pune pe seama accelerației forței centrifuge la ecuatorul terestru, iar restul de 1/3 pe seama turtirii Pămîntului.

Bazîndu-se pe legile mecanicii fluidelor, *Clairaut* a dedus relații matematice între turtirea sferoidului terestru și accelerația gravitațională la pol și la ecuator, din care se determină turtirea sferoidului, pe baza măsurătorilor accelerației gravitaționale.

O utilizare a măsurărilor gravimetrice este studiul *anomaliilor forței de gravitație*, adică al abaterilor accelerației gravitaționale de la valorile sale medii ce se obțin după formula (3.11). Anomaliile locale ale forței de gravitație pun în evidență, dacă sînt pozitive, existența unor zăcăminte minerale, iar dacă sînt negative — zăcăminte de sare gemă.

Observație. Turtirea Pămîntului poate fi determinată și prin metode astronomice, după valoarea precesiei axei Pămîntului, precum și după unele perturbații ale mișcării Lunii sau a sateliților artificiali ai Pămîntului (cap. VII și Anexa 5).

§ 3.4. MĂSURAREA MASEI ŞI DENSITĂŢII MEDII A PĂMÎNTULUI

Rezultatele suficient de precise în determinarea masei Pămîntului se obţin prin metodele de laborator, care, în esenţă, se reduc la *determinarea constantei gravitaţionale, G.*

Amintim doar prima dintre aceste metode, care a fost aplicată întîia oară în anul 1798, de *Cavendish,* folosind pentru determinarea constantei G *balanţa de torsiune.* Rezultatul determinărilor actuale este: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm^3 g^{-1} s^{-2}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2 kg^{-2}}$.

Luînd pentru valoarea medie a razei Pămîntului $R = 6371$ km şi pentru valoarea medie a acceleraţiei forţei de gravitaţie $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, formula

$$g = G\frac{\mathcal{M}_\oplus}{R^2} \tag{3.12}$$

ne dă *masa Pămîntului*: $\mathcal{M}_\oplus = 5{,}98 \cdot 10^{27}\ \mathrm{g} \simeq 6 \cdot 10^{27}\ \mathrm{g} = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$.

Cunoscînd masa Pămîntului şi volumul lui, putem calcula şi *densitatea sa medie,* care se obţine egală cu $5{,}52\ \mathrm{g/cm^3}$ (densitatea creşte de la suprafaţă spre interior).

§ 3.5. STRUCTURA PĂMÎNTULUI

1°. **Atmosfera** (fig. 3.5) este regiunea din jurul Pămîntului în care acesta constituie „organizatorul" principal al mişcării tuturor particulelor interplanetare. Putem distinge din acest punct de vedere *două părţi*:

— *prima,* pînă la circa 2000 km înălţime, în care este preponderent cîmpul gravific terestru; aceasta se compune din: (1) *atmosfera neutră*; (2) *ionosfera* şi (3) *exosfera*;

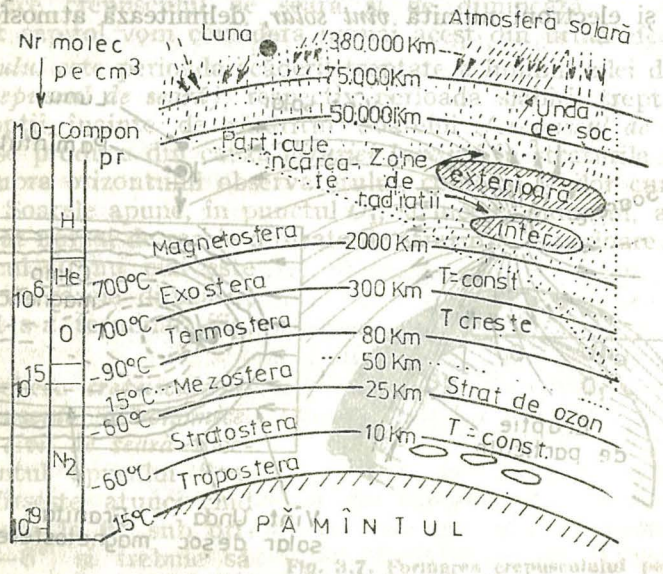


Fig. 3.5. Schema simplificată a atmosferei terestre (fără seară şi cu mărimi mijlocii).

— *a doua,* în care este preponderent cîmpul magnetic terestru, de la 2000 km pînă la cîteva zeci de raze terestre; această parte este numită *magnetosferă* (4).

(1) *Atmosfera neutră* este formată din atomi şi molecule în stare neutră, cu proprietăţile lor chimice. Ea se compune din:

— *troposfera,* care se extinde pînă la înălţimea de 13 km;

— *stratosfera,* pînă la înălţimea de 25 km, în care temperatura scade pînă la —55°C, rămînînd aceeaşi în întreaga zonă şi crescînd pînă la —8°C peste 25 km;

— *mezosfera,* în care temperatura întîi creşte şi apoi scade pînă la —90°C (între 85—90 km).

(2) *Ionosfera* se compune din electroni şi ioni proveniţi din ionizarea aerului rarefiat sub acţiunea razelor ultraviolete şi X ale Soarelui. Partea sa inferioară este *termosfera,* în care temperatura medie creşte pînă la 700°C (pentru 700 km), fiind vorba aici de *temperatura cinetică.* În ionosferă, electronii liberi au rolul foarte important de a reflecta undele radio pentru comunicaţii.

(3) *Exosfera* se extinde între 700—2000 km şi este caracterizată printr-o densitate foarte mică, între 10^8 — 10^2 particule pe cm^3.

(4) *Magnetosfera.* Aici particulele au nu numai o agitaţie termică, ci sînt supuse şi cîmpului magnetic terestru. Mişcarea particulelor este controlată de cîmpul geomagnetic. Magnetosfera se întinde pînă la 50 000 km de partea Soarelui şi zeci de raze terestre în partea opusă (fig. 3.6). În interiorul magnetosferei sînt *două centuri de radiaţii* (ale lui *Van Allen*) descoperite cu ajutorul satelitului artificial *Explorer I* (1958).

Prima centură (internă) are densitatea maximă la o distanţă de 1,5 raze terestre, conţinînd o populaţie foarte stabilă de protoni energetici, neutroni cosmici reflectaţi şi încetiniţi de atmosfera înaltă.

A doua centură (exterioară) este populată de particule energetice provenind din coroana solară, atingînd un maxim al radiaţiei la circa 19 000 km de suprafaţa Pămîntului.

Dincolo de magnetosferă se întinde *coroana solară,* care, prin curgerea de protoni şi electroni numită *vînt solar,* delimitează atmosfera terestră.

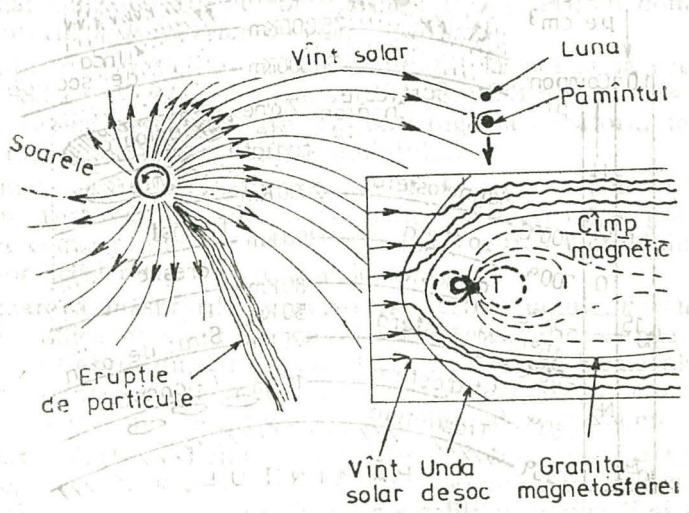


Fig. 3.6. Pămîntul în vîntul solar.

Densitatea atmosferei (ρ) variază de la $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ g/cm³ la suprafața terestră, descrescînd foarte repede cu înălțimea (h). Variația densității respectă aproximativ legea exponențială:

$$\rho \sim \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \tag{3.13}$$

unde H se numește *scara înălțimilor*. *Observațiile optice sistematice* ale sateliților artificiali, efectuate în cadrul vastei rețele mondiale de stații de observare, în context cu numeroase *cercetări teoretice*, au dezvăluit o structură foarte complexă a legii de variație a densității atmosferei terestre în funcție de loc (h) și de timp (t).

Presiunea atmosferică la suprafața terestră este aceea a unei coloane de mercur cu înălțimea de 76 cm, fiind egală cu $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m². Depinzînd de densitate și temperatură, se vede, de asemenea, că ea scade repede cu înălțimea.

Compoziția chimică a atmosferei se prezintă astfel:

— azot diatomic (N_2): 78% (din volum);
— oxigen: 21%;
— argon: 0,934%;
— bioxid de carbon: 0,034%.

Vaporii de apă sînt prezenți peste tot, dar în cantitate variabilă (între 0—2%). Este de remarcat cantitatea foarte redusă de hidrogen ($5 \cdot 10^{-5}$%), deși acest element este elementul preponderent în materia Metagalaxiei. Datorită acestei structuri avem o *atmosferă propice vieții*.

Atmosfera produce o serie de *efecte cu consecințe astronomice*:
— absoarbe radiații, reducînd strălucirea corpurilor cerești (25%);
— exercită o absorbție selectivă (diferită cu lungimea de undă);
— schimbă direcția razelor de lumină și deformează imaginile (efectele refracției astronomice);
— produce crepusculul de seară și de dimineață.

În acest capitol vom considera numai acest din urmă efect.

Crepusculul este perioada scăderii treptate a luminii zilei după apusul Soarelui *(crepuscul de seară)*, respectiv perioada slăbirii treptate a întunericului nopții înainte de răsăritul Soarelui *(crepuscul de dimineață)*. Fenomenul se produce din cauza *difuziei luminii* în straturile atmosferice situate deasupra orizontului observatorului, conform legilor cunoscute din fizică. Dacă Soarele apune, în punctul O_1, și începe amurgul, atunci locul O este luminat numai de razele difuzate de straturile superioare ale atmosferei, iar locul O_2 nu mai este luminat nici de razele difuzate; aici amurgul s-a terminat (fig. 3.7).

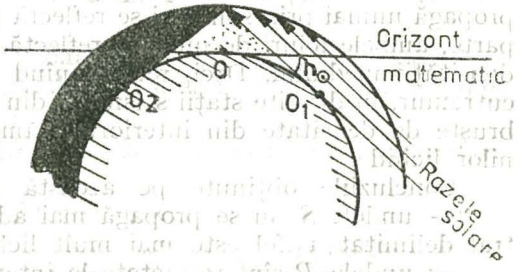


Fig. 3.7. Formarea crepusculului pentru observatorul O.

Se deosebesc *crepuscule civile* și *crepuscule astronomice*. *Crepusculul civil de seară* începe în momentul apusului Soarelui și se sfîrșește atunci cînd Soarele coboară la 6° sub orizont ($h_\odot = -6°$) și trebuie să recurgem la lumina artificială;

pe cer se văd numai stelele cele mai strălucitoare. *Crepusculul civil de dimineață* se produce simetric, în ordinea inversă. *Crepusculul astronomic* (de seară și de dimineață) durează mai mult, întrucît se consideră că sfîrșitul (sau începutul) crepusculului are loc cînd centrul Soarelui se află la 18° sub orizont ($h_\odot = -18°$). Din acest moment începe *noaptea propriu-zisă* (în cazul crepusculului astronomic de seară) *și pe cer apar și stelele cele mai puțin strălucitoare.*

La *latitudinea geografică* $\varphi = 60°33'$, în ziua solstițiului de vară ($\delta_\odot = +23°27'$), înălțimea Soarelui în culminația inferioară (miezul nopții) este $h_\odot = -6°$. Deci la această latitudine în ziua solstițiului de vară sfîrșitul crepusculului civil de seară coincide cu începutul crepusculului civil de dimineață, adică crepusculul civil durează toată noaptea; acesta este fenomenul *nopților albe*. Numărul nopților albe într-un an și posibilitatea producerii lor, ca și durata crepusculului în general, depind de latitudinea geografică a locului și de coordonatele Soarelui.

Crepusculele sînt folosite în special la *observarea optică a sateliților artificiali ai Pămîntului* fără lumină proprie.

2°. **Hidrosfera.** este formată din totalitatea apei (dulce și sărată) care acoperă în mod discontinuu aproape 75% din suprafața solidă a Pămîntului. Adîncimea sa medie este de 4 km, însă poate ajunge în mod excepțional la 10 km.

3°. **Biosfera** este totalitatea materiei organice, vie sau moartă.

4°. **Litosfera** sau scoarța terestră este stratul superficial cu o grosime medie de 40 km, mai subțire (dar mai dens) sub oceane. Ea este studiată cu ajutorul metodelor gravimetriei.

Densitatea medie a litosferei este de 3 g/cm³. Masa ei este abia de 0,7% din cea a Pămîntului. Este formată din roci eruptive, cele sedimentare și metamorfice fiind prezente în mică măsură. Compoziția sa chimică este Si și O în majoritate, apoi metale. Din forajele efectuate în scoarța terestră rezultă creșterea temperaturii spre interior, creștere cu o valoare medie de 25°C pentru fiecare kilometru adîncime.

5°. **Interiorul Pămîntului.** Sub scoarță se află un strat numit *mantaua terestră*, care se extinde pînă la 3000 km adîncime. Densitatea crește încet spre interior, de la 3,5 la 6 g/cm³. Se compune dintr-o rocă în stare plastică.

Urmează *interiorul adînc*, pentru studiul căruia se recurge la *undele seismice (produse de cutremurele de pămînt)*. Dintr-o regiune unde se produc cutremurele pornesc *unde longitudinale* (numite P = primare sau de compresiune) și *unde transversale* (numite S = secundare sau de distorsie). În timp ce undele P se propagă în medii solide și lichide, undele S se propagă numai prin solide și se reflectă pe interfața solid-lichid. Pe de altă parte, ambele feluri de unde se reflectă și se refractă odată cu schimbarea densității mediului. Deci, recepționînd undele P și S provenite de la un cutremur, în diferite stații seismice, din analiza lor se pot deduce variațiile bruște de densitate din interiorul Pămîntului, precum și existența regiunilor lichide.

Concluziile obținute pe această cale sînt următoarele:

— undele S nu se propagă mai adînc de 3000 km, deci nucleul central delimitat astfel este mai mult lichid;

— undele P sînt refractate la interfața cu nucleul, deci intervine aici o creștere bruscă a densității pînă la 9 g/cm³;

— în interiorul nucleului undele P nu se propagă rectiliniu, ci suferă o nouă refracție, la aproximativ 5000 km adîncime, unde avem o nouă creștere bruscă a densității, de la 11,5 la 16 g/cm³.

Interiorul Pămîntului poate fi reprezentat schematic ca în fig. 3.8.

Din abundența elementelor radioactive, ca și din ipoteza contractării lente a Pămîntului, se deduce o temperatură centrală nu mai mică de 1600 °C, dar probabil apropiată de 6000 °C. Presiunea centrală este de $3{,}64 \cdot 10^{11}$ N/m².

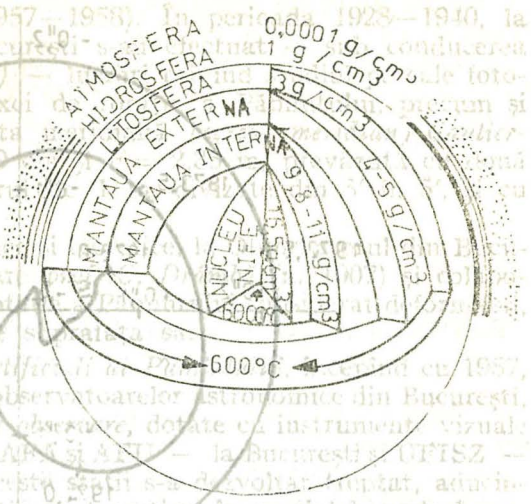


Fig. 3.8. Schema interiorului Pămîntului.

În general, Pămîntul se comportă ca o sferă solidă și elastică, depășind în aceste două proprietăți oțelul.

Nucleul este compus în majoritate din fier, nichel și oxizii lor (pentru a explica marea densitate, precum și prin analogia cu meteoriții).

§ 3.6. MIȘCĂRILE PĂMÎNTULUI

Pămîntul are următoarele *mișcări principale*:

(1) *Mișcarea de rotație* în jurul axei sale, efectuată cu $P_{rot} = 23^h\ 56^{min}\ 04{,}098^s = 86164{,}098^s$ timp mediu (constantă, în primă aproximație), cu o *viteză ecuatorială*:

$$V_e = \frac{2\pi \cdot 6\,378\,246}{86\,164} \text{ m/s} \simeq 465 \text{ m/s}, \tag{3.14}$$

iar *la latitudinea* φ *cu viteza*:

$$V_\varphi = V_e \cos\varphi \simeq 465 \cos\varphi \text{ m/s}; \tag{3.15}$$

dovezile acestei mișcări sînt: *devierea spre est* a corpurilor de la verticală în căderea liberă; experiența cu *pendulul lui Foucault* (1851); *observații directe din spațiul cosmic*.

(2) *Mișcarea de revoluție* în jurul Soarelui, efectuată în timpul unui an sideral; dovezile acestei mișcări (paralaxele stelare și aberația luminii) le vom vedea în capitolul următor.

(3) *Mișcările de precesie și nutație*, care, de asemenea, vor fi prezentate în capitolul următor.

(4) *Alte mișcări ale Pămîntului*, dintre care cele mai semnificative sînt:

— *deplasarea polilor geografici ai Pămîntului* pe suprafața sa; se produce datorită faptului că axa instantanee de rotație a Pămîntului nu păstrează o direcție fixă față de acesta, în principal din cauza neomoge-

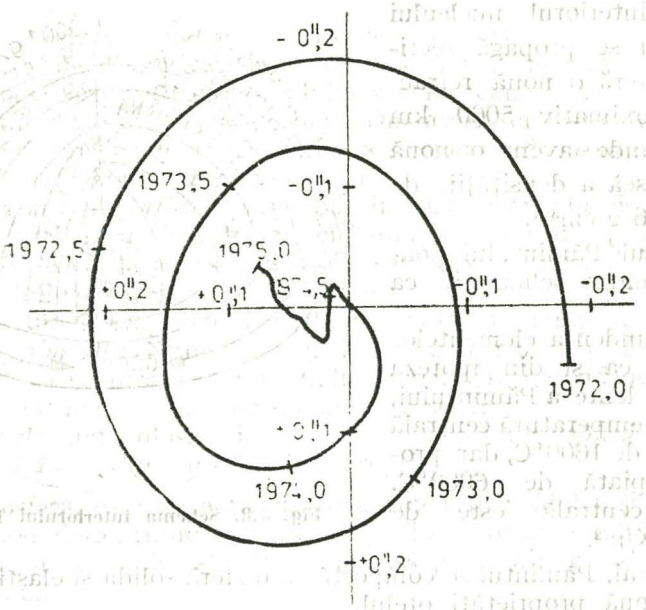


Fig. 3.9. Polodie — curbă descrisă pe suprafaţa Pământului de polul nord instantaneu de rotaţie.

nităţii structurii interne a Pământului; curba descrisă de polul nord (numită *polodie*) poate fi înscrisă într-un pătrat cu latura de cca. 25 m; variaţiile reale ale latitudinilor geografice datorate acestui fenomen au fost descoperite în secolul trecut (fig. 3.9);

— *mareele:* în vecinătatea meridianului terestru, cînd Luna sau Soarele se află deasupra acestuia, Pământul suferă deformaţii periodice numite maree (fenomenul de *flux şi reflux*);

— *deplasarea (deriva) continentelor* (deplasarea relativă a continentelor unul faţă de altul), care se explică prin structura sub formă de plăci a scoarţei — plăci care se deplasează unele faţă de altele; după multe încercări fără rezultat s-au pus în evidenţă nu de mult, prin măsurări de mare precizie, în special prin metoda laser.

§ 3.7. CONTRIBUŢIA OBSERVATOARELOR ASTRONOMICE DIN ŢARĂ LA STUDIUL STRUCTURII ŞI MIŞCĂRILOR PĂMÎNTULUI

Observatorul astronomic din Bucureşti, înfiinţat în 1908 de *profesorul N. Coculescu (1866—1952)**, a participat încă în anul 1933 la determinările de longitudini, alături de un mare număr de observatoare similare, scopul urmărit fiind acela de a verifica ipoteza lui Wegener privind *deplasarea continentelor*; aceste determinări (inclusiv determinări de latitudini) au fost reluate, cu mijloace de mare precizie, cu ocazia programului

* Constantin Drâmbă: „75 ani de la înfiinţarea Observatorului astronomic din Bucureşti", în *Anuarul astronomic '83* (Centrul de Astronomie şi Ştiinţe Spaţiale Bucureşti), pp. 267—280, Editura Academiei R.S.R., 1982.

Anului Geofizic Internațional (1957—1958). În perioada 1928—1940, la Observatorul astronomic din București s-au efectuat — sub conducerea *prof. Gh. Demetrescu (1885—1969)* — lucrări privind studiul pe cale fotografică al *precesiei și nutației* axei de rotație a Pământului, precum și *determinări de latitudini* cu luneta meridiană *(cercul meridian) Gautier-Prin* (avînd obiectivul cu $D = 19$ cm și $F = 2{,}35$ m, prevăzută cu două cercuri de declinație, cu diametrul de 1 m, divizate din 5′ în 5′, și cu alte accesorii).

Importante contribuții, practice și teoretice, la Observatorul din București, au adus și aduc în continuare *prof. C. Drâmbă* (n. 1907) și colaboratorii săi, în studiul mișcării de rotație a Pământului considerat deformabil, al mișcării polilor Pământului pe suprafața sa.

Pentru urmărirea sateliților artificiali ai Pământului, începînd cu 1957, au luat ființă și la noi, în cadrul observatoarelor astronomice din București, Cluj-Napoca și Timișoara, *stații de observare*, dotate cu instrumente vizuale și fotografice (camere fotografice NAFA și AFU — la București și UFISZ — la Cluj-Napoca). Activitatea la aceste stații s-a dezvoltat treptat, aducîndu-se importante contribuții practice și teoretice, în special în cadrul programului INTERCOSMOS, al secției sale „Cercetări și experiențe comune cu ajutorul observațiilor sateliților artificiali în scopuri geodezice și geofizice" (conform protocolului între Comisia Română pentru Activități Spațiale și Consiliul Astronomic al Academiei de Științe a URSS). Astfel, *la București, prof. C. Popovici (1910—1977)* și colaboratorii săi* au dezvoltat metode ale geodeziei spațiale (determinarea coordonatelor geocentrice ale sateliților și stațiilor de observare, determinarea vectorilor spațiali pentru controlul triangulației clasice etc.), iar *la Cluj-Napoca, prof. Gh. Chiș (1913—1981)* și colaboratorii săi au elaborat metode de determinare pe cale teoretică a parametrilor structurali ai atmosferei înalte, în corelație cu indicii activității solare și geomagnetice (determinarea elementelor orbitale ale sateliților artificiali din observații simultane, stabilirea de formule empirice pentru reprezentarea densității atmosferice în funcție de altitudine și de timp, elaborarea de teorii de mișcare a sateliților artificiali în atmosferă și obținerea de formule mai precise pentru calculul densității atmosferei înalte etc.).

Legat de activitatea observatoarelor astronomice, s-au dezvoltat în țara noastră și cercetările seismice. Prof. *Gh. Demetrescu* a pus bazele seismologiei românești, înființînd rețeaua de stații seismice pe teritoriul țării și aducînd contribuții originale la studiul cutremurelor de Pământ. Primii săi colaboratori au fost *prof. Gh. Petrescu (1905—1965)* și *prof. I. Curea (1901—1977)*, ultimul fiind fondatorul Observatorului astronomic și al Stației seismologice din Timișoara. Cercetările seismice și ale scoarței terestre se efectuează în prezent în cadrul Centrului de Fizica Pământului și Seismologie.

Un bogat material privind fizica globului se poate găsi în lucrarea lui Șt. Airinei *Pământul ca planetă* (Ed. Albatros, București, 1982).

* Alexandru Dinescu: „Introducere în geodezia geometrică spațială", Editura tehnică, București, 1980.

CAPITOLUL IV

FENOMENE CARE MODIFICĂ POZIȚIILE AȘTRILOR PE CER

Pînă acum, pentru simplitate, am lăsat în afara considerentelor o serie de fenomene care „falsifică", mai mult sau mai puțin, observațiile și îngreunează determinarea coordonatelor aștrilor. Aceste fenomene sînt: efectul optic al refracției astronomice; efectul optic al mișcărilor Pămîntului; aberația diurnă, anuală și secular ă; efectul geometric al mișcărilor Pămîntului: paralaxa diurnă, anuală și secular ă; deplasarea planelor fundamentale de referință: precesia și nutația; mișcările proprii ale stelelor.

§ 4.1. REFRACȚIA ASTRONOMICĂ

Razele de lumină ale aștrilor, înainte de a ajunge la observatorul terestru, trec prin învelișul atmosferei Pămîntului și se refractă în acesta, conform legilor cunoscute din fizică. Deoarece densitatea atmosferei crește spre suprafața Pămîntului, razele luminoase se refractă din ce în ce mai mult, după o curbă, astfel că direcția după care ele ajung la observator este deviată spre zenitul observatorului (fig. 4.1).

Se numește *refracție astronomică* unghiul dintre direcția în care se vede (aparent) astrul ($O\sigma'$) și direcția după care se propagă razele lui în afara atmosferei ($O\sigma$). Acest unghi se notează cu litera R.

Legătura între z — distanța zenitală adevărată și z' — distanța zenitală aparentă este dată de formula (fig. 4.1):

$$z = z' + R. \quad (4.1)$$

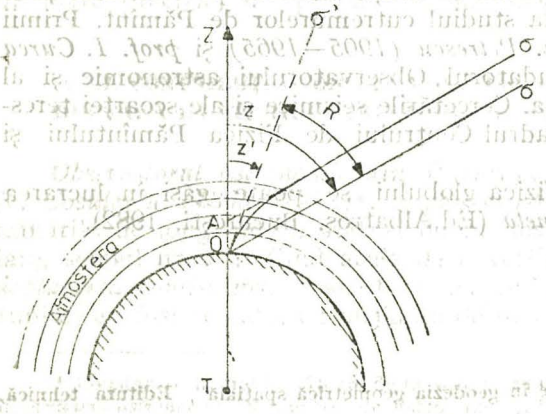


Fig. 4.1. Schema refracției astronomice.

Această formulă arată că, datorită fenomenului refracției, distanța zenitală a astrului se micșorează cu mărimea R: refracția parcă ar ridica astrul deasupra orizontului. Conform primei legi a refracției, întreaga traiectorie a razei este situată în același plan (planul vertical), adică refracția astronomică nu modifică azimutul A al astrului.

Mărimea refracției depinde de înălțimea astrului deasupra orizontului și, de asemenea, de parametrii atmosferei (densitate, presiune, temperatură). Valoarea exactă a refracției se exprimă printr-o formulă de integrală definită după care sînt întocmite *tabele speciale* menite să ușureze munca astronomilor. Aici ne vom limita la *deducerea unei formule aproximative*, pentru *refracția medie* — refracție corespunzătoare valorilor medii ale presiunii și temperaturii atmosferei într-un loc dat. Această formulă este aplicabilă numai *pentru distanțe zenitale mai mici de 70°*.

Presupunem că suprafața Pămîntului este plană și că atmosfera este împărțită în straturi plane și paralele cu suprafața terestră, avînd indicii de refracție $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_m$ (fig. 4.2).

Notînd cu $i_m, i_{m-1} \ldots, i_0$ unghiurile de incidență ale razei luminoase pe suprafețele de separare ale straturilor, putem scrie, aplicînd *legea lui Snellius-Descartes* pentru straturile vecine:

$$\frac{\sin i_m}{\sin i_{m-1}} = \frac{n_{m-1}}{n_m}, \quad \frac{\sin i_{m-1}}{\sin i_{m-2}} = \frac{n_{m-2}}{n_{m-1}}, \ldots, \frac{\sin i_1}{\sin i_0} = \frac{n_0}{n_1}.$$

Înmulțind aceste egalități membru cu membru și făcînd simplificările, obținem formula:

$$\frac{\sin i_m}{\sin i_0} = \frac{n_0}{n_m} \tag{4.2}$$

Avînd $i_m = z$, $i_0 = z'$ și $n_m = 1$, pe baza formulei (4.1):

$$i_m = z' + R \tag{4.3}$$

rezultă:

$$\frac{\sin (z' + R)}{\sin z'} = n_0, \tag{4.4}$$

unde n_0 se poate determina din măsurări, iar z' se obține din observații.

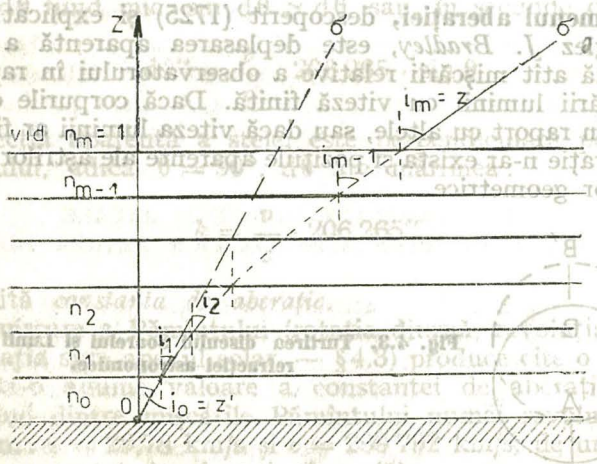


Fig. 4.2. Schema refracției pentru straturi plan-paralele.

Ţinînd cont de faptul că pentru $0° \leqslant z' \leqslant 70°$ refracţia are valori mici, putem considera: $\cos R = 1$, $\sin R = R \cdot \sin 1''$, unde $\sin 1'' = \frac{1}{206\,265}$, dacă R se măsoară în secunde de arc. Atunci formula obţinută, după dezvoltarea mărimii $\sin(z' + R)$, devine:

$$R = \frac{n_0 - 1}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tg} z' \qquad (4.5)$$

Coeficientul $\frac{n_0 - 1}{\sin 1''}$ se numeşte *constantă de refracţie*; pentru condiţiile normale (temperatura $t = 10°C$ şi presiunea $p = 760$ mm Hg), ea are valoarea 58″,3 şi formula (4.5) devine:

$$R = 58'',3 \operatorname{tg} z' \qquad (4.6)$$

La orizont valoarea refracţiei este de aproape 35′.

Influenţa refracţiei se manifestă în următoarele fenomene:

a) *Răsăritul şi apusul aştrilor*, prelungind durata drumului lor deasupra orizontului. Astfel, datorită refracţiei, *Soarele* răsare mai devreme şi apune mai tîrziu decît ar trebui conform poziţiei lui geometrice, deci durata zilei se măreşte.

b) *Turtirea discului Soarelui şi al Lunii în apropierea orizontului:* refracţia crescînd rapid în apropierea orizontului, coardele verticale ale discului par să se scurteze, în general, proporţional cu lungimea lor ($AB > A'B'$, fig. 4.3) şi conturul discului se transformă dintr-un cerc într-o elipsă cu axa mică pe înălţime.

c) *Modificarea coordonatelor orare, ecuatoriale şi ecliptice ale aştrilor.*

d) *Scînteierea (scintilaţia) stelelor*, fenomen observat uşor în apropierea orizontului: razele de lumină, trecînd prin atmosfera tulburată de curenţi şi variaţii bruşte ale densităţii, îşi schimbă repede direcţia din cauza refracţiei şi se produc şi fenomene de interferenţă.

§ 4.2. ABERAŢIA LUMINII

1°. **Fenomenul aberaţiei**, descoperit (1725) şi explicat (1729) de astronomul englez *J. Bradley*, este deplasarea aparentă a direcţiei unui astru, datorată atît mişcării relative a observatorului în raport cu astrul, cît şi propagării luminii cu viteză finită. Dacă corpurile cereşti ar fi în repaus unele în raport cu altele, sau dacă viteza luminii ar fi infinită, fenomenul de aberaţie n-ar exista şi poziţiile aparente ale aştrilor ar corespunde cu poziţiile lor geometrice.

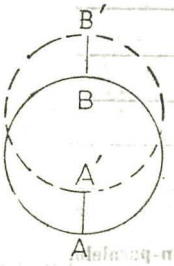


Fig. 4.3. Turtirea discului Soarelui şi Lunii datorită refracţiei astronomice.

Datorită aberației luminii, direcția în care trebuie să orientăm luneta pentru observarea unei stele nu coincide cu direcția reală a razei de lumină care ne vine de la stea. Explicarea fenomenului, pe baza teoriei corpusculare a luminii, este următoarea:

Fie observatorul în T, animat împreună cu Pămîntul de viteza v față de steaua σ, viteză orientată spre punctul cerului numit *apexul mișcării observatorului* (A), a cărei direcție formează cu direcția aparentă la stea unghiul θ (fig. 4.4). Considerăm că observatorul din T, cu o lunetă avînd obiectivul în O și reticulul în T, urmărește steaua σ. Datorită vitezei c a luminii, în timpul τ cît lumina (fotonul) parcurge lungimea OT a lunetei, reticulul se deplasează cu TT'. Pentru a vedea steaua a cărei lumină cade pe obiectivul din O, este necesar ca reticulul să fie deplasat în T'', astfel ca $\overrightarrow{TT''} = -\overrightarrow{TT'}$. Steaua se va vedea în direcția TO', care formează cu direcția $T\sigma$ unghiul $d\theta$, numit *unghi de aberație*. Deci, pentru ca lumina stelei să pătrundă în ocular, luneta trebuie înclinată cu obiectivul înainte, în sensul mișcării Pămîntului, cu unghiul $d\theta$.

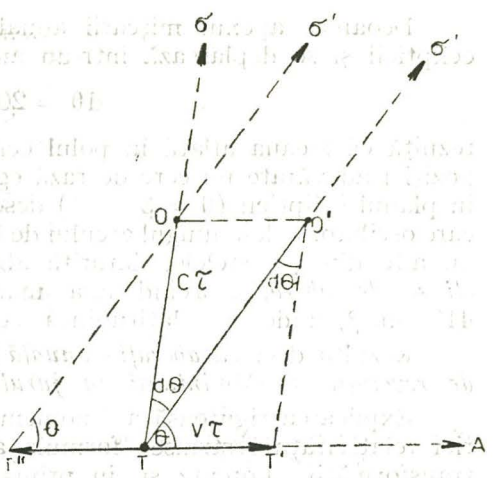


Fig. 4.4. Schema aberației luminii.

Vom scrie teorema sinusului pentru triunghiul TOO' (sau $TT'O'$). Avem:

$$\frac{\sin d\theta}{v\tau} = \frac{\sin \theta}{c\tau},$$

$$\sin d\theta = \frac{v}{c} \cdot \sin \theta. \tag{4.7}$$

Unghiul $d\theta$ fiind mic, $\sin d\theta \simeq d\theta$, sau, în secunde de arc:

$$d\theta'' = \frac{v}{c} \cdot 206\,265 \cdot \sin \theta \tag{4.8}$$

Cînd direcția aparentă a stelei este perpendiculară pe direcția mișcării Pămîntului, adică $\theta = 90°$, $d\theta$ are mărimea:

$$k = \frac{v}{c} \cdot 206\,265'', \tag{4.9}$$

mărime numită *constanta de aberație*.

Fiecare mișcare a Pămîntului (rotația diurnă, revoluția în jurul Soarelui și translația spre apexul solar — § 4.3) produce cîte o aberație caracterizată printr-o anume valoare a constantei de aberație.

Considerînd dintre mișcările Pămîntului numai revoluția sa în jurul Soarelui, avem: $v = 29{,}78$ km/s și $c = 299\,792$ km/s, de unde $k = 20'',50$ — valoarea constantei de aberație (anuală).

Deoarece apexul mişcării anuale a observatorului se află în planul eclipticii şi se deplasează într-un an cu 360°, din formula:

$$d\theta = 20'',50 \sin \theta \qquad (4.10)$$

rezultă că steaua aflată în polul eclipticii ($\theta = \beta = 90°$) descrie în jurul poziţiei adevărate un cerc de rază egală cu 20″,50, pe cînd stelele situate în planul eclipticii ($\theta = \beta = 0°$) descriu în jurul poziţiilor lor reale o mişcare oscilatorie de-a lungul arcului de lungime egală cu $20'',50 \cdot 2 \simeq 41'',00$. În alte direcţii, stelele, datorită aberaţiei luminii, descriu elipse numite *elipse de aberaţie*, avînd axa mare egală cu 41″ şi axa mică egală cu 41″ sin β, unde β — latitudinea ecliptică a stelei respective.

Rezultă deci că *aberaţia anuală a stelelor este o dovadă fizică a mişcării de revoluţie a Pămîntului în jurul Soarelui.*

Explicarea riguroasă a fenomenului de aberaţie se face în cadrul teoriei relativităţii restrînse; formula aberaţiei se obţine ca o consecinţă a transformării Lorentz şi, în primă aproximaţie (la precizia observaţiilor actuale), se reduce la cea din teoria clasică mai sus prezentată.

De corecţiile de aberaţie se ţine cont atît în coordonatele ecuatoriale, cît şi în cele ecliptice.

2°. **Aberaţia Soarelui, planetelor şi cometelor,** care au mişcări considerabile pe sfera cerească, se determină *altfel* decît aberaţia stelelor. În cazul acestor corpuri, se determină *intervalul de timp τ în care lumina parcurge distanţa de la astrul respectiv la Pămînt,* interval numit *timp de aberaţie* sau *ecuaţia luminii.*

Pentru determinarea timpului de aberaţie este necesar să se cunoască distanţa geocentrică a astrului, Δ, în unităţi astronomice. Dacă a — lungimea unităţii astronomice în km, avem:

$$\tau = \frac{a}{c} \cdot \Delta = 498^{s},7 \cdot \Delta = 0^{z},00577\ \Delta \qquad (4.11)$$

În cazul unui astru aparţinînd sistemului solar, problema aberaţiei se prezintă, prin urmare, astfel: *direcţia aparentă a astrului la un moment dat t coincide cu direcţia adevărată a astrului* (direcţia dreptei ce uneşte poziţiile ocupate de Pămînt şi astru) *la momentul $t - \tau$.*

Prima determinare a timpului de aberaţie — pe baza observaţiilor asupra eclipselor sateliţilor planetei Jupiter — se datorează astronomului danez O. Roemer (1676), care deduce de aici viteza luminii; prin aceasta el face un pas important spre descoperirea fenomenului de aberaţie.

§ 4.3. PARALAXE DIURNE ŞI ANUALE. DETERMINAREA DISTANŢELOR ASTRILOR PRIN METODA TRIGONOMETRICĂ

Deplasarea reală a observatorului în spaţiu produce o schimbare aparentă a direcţiei astrului, numită *deplasare paralactică.* De aici rezultă: paralaxele diurne sau geocentrice, produse de mişcarea de rotaţie a Pămîntului în jurul axei proprii, efectele fiind simţite numai în limitele sistemului solar; paralaxele anuale sau heliocentrice ale stelelor, produse de mişcarea de revoluţie a Pămîntului în jurul Soarelui; paralaxele seculare, produse de mişcarea de translaţie a sistemului solar spre apexul solar.

1°. **Paralaxa diurnă și determinarea distanțelor în sistemul solar.** *Coordonatele aștrilor determinate din observații* ce se efectuează pe suprafața Pămîntului se numesc *topocentrice*; acestea, la același astru și același moment, sînt în general diferite pentru diferite puncte ale suprafeței terestre. Diferențele sînt însă observabile numai la aștrii aparținînd sistemului solar (la stele, aceste diferențe sînt mai mici decît 0″,00004). Din mulțimea de direcții în care astrul σ se vede din diferite puncte ale Pămîntului, se consideră *fundamentală direcția* care pornește din centrul Pămîntului (T); aceasta indică *poziția geocentrică* a astrului și determină *coordonatele* lui *geocentrice*. Efemeridele cuprind coordonatele geocentrice ale aștrilor (cap. VII).

Fig. 4.5. Paralaxa diurnă (de înălțime și orizontală).

Se numește *paralaxă diurnă* sau *geocentrică* unghiul dintre direcțiile în care se vede astrul σ' din centrul Pămîntului și dintr-un punct oarecare al suprafeței terestre, adică unghiul p' (fig. 4.5). Altfel spus, paralaxa diurnă *(de înălțime)*, p', este unghiul sub care se vede din astru raza Pămîntului R (raza geocentrică a observatorului).

Fie O punctul de pe Pămînt de unde astrul σ' se vede la distanța zenitală z'. Să notăm cu Δ distanța de la centrul T al Pămîntului la astrul σ' și cu z distanța sa zenitală geocentrică. Din triunghiul $OT\sigma'$ avem:

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{\sin p'}{\sin z'}, \tag{4.12}$$

de unde

$$\sin p' = \frac{R}{\Delta} \sin z' \tag{4.12'}$$

Unghiul p' fiind mic, putem pune $p' \simeq \sin p'$. Se vede că paralaxa p' variază cu R și $\sin z'$, fiind maximă cînd $R = R_0$ (raza ecuatorială a Pămîntului) și $\sin z' = 1$, adică $z' = 90°$ (orizont).

Paralaxa diurnă orizontală, p, a unui astru σ (același cu σ') este unghiul sub care se vede din acel astru raza Pămîntului R, cînd astrul σ se află la orizontul locului. Din triunghiul $OT\sigma$ avem:

$$\sin p = \frac{R}{\Delta}, \tag{4.13}$$

și formula (4.12′) ne dă:

$$p' = p \sin z' \tag{4.14}$$

Pentru a evita diferențele dintre paralaxele diurne orizontale, datorate formei elipsoidale a Pămîntului (cap. III), valorile acestor paralaxe se calculează pentru o anumită rază a Pămîntului; se ia pentru aceasta

$R_0 = 6378{,}16$ km și în acest caz avem *paralaxa* c
ecuatorială p_0:

$$\sin p_0 = \frac{R_0}{\Delta}$$

Fig. 4.5 arată că

$$z = z' - p',$$

adică din cauza paralaxei astrul ne apare la o înălțime mai mică c
pra orizontului, adică acționează în sens opus refracției astrono
De acest efect se ține cont și la *calculul timpului și locului răsări*
aștrilor; atunci distanța zenitală adevărată a astrului este: $z =$
$+ 35' - p = 90° + 35' - p$.

Determinarea distanțelor în sistemul solar se poate face după formu

$$\Delta = \frac{206\,265}{p_0''} R_0 \qquad (4.$$

Prin urmare, determinarea distanțelor după metoda trigonometrică
reduce la determinarea *paralaxei orizontale*. Ea se determină din obse
vații prin metode specifice; de exemplu, *paralaxa Lunii* se determină di
observații simultane asupra Lunii, măsurîndu-i distanța zenitală din dou
puncte situate pe același meridian geografic; iar paralaxa Soarelui — prin
intermediul determinării paralaxelor unor corpuri ce se apropie de Pămînt
la o distanță mai mică decît distanța Soarelui (planeta Marte, mica pla-
netă Eros etc.).

Distanța Soarelui și Lunii, de exemplu, se obține astfel: pentru Soare:
$p_0'' = 8'',79$ și $\Delta = 149{,}5 \cdot 10^6$ km; pentru Lună: $p_0'' = 57'2'',5$ și $\Delta =$
$= 384{,}4 \cdot 10^3$ km.

Dezvoltarea radiotehnicii din ultima vreme a făcut posibilă determi-
narea distanțelor corpurilor sistemului solar prin *metode de radiolocație*.
Astfel, în 1946 s-a efectuat radiolocația Lunii, iar după 1957 radiolocația
Soarelui, planetelor Mercur, Venus, Marte etc. Cunoscînd viteza de pro-
pagare a undelor radio $c = 3 \cdot 10^5$ km/s și măsurînd timpul t (sec) al
parcurgerii de către semnal a distanței Pămînt—corpul ceresc respectiv
(drumul dus-întors), distanța astrului se obține după formula:

$$\Delta = \frac{ct}{2} \qquad (4.18)$$

De exemplu, în urma radiolocației planetelor Mercur și Venus, efectuată
în U.R.S.S. și S.U.A. (1961—1963), pentru distanța medie Pămînt—Soare
s-a obținut valoarea $\Delta = 149\,598\,500$ km (± 500 km). Această distanță
are o deosebită importanță în astronomie, fiind considerată ca *unitate de*
distanță, numită unitate astronomică (UA).

În urma hotărîrii celei de-a XII-a Adunări Generale a U.A.I. (1964),
începînd din 1970 sînt folosite următoarele valori ale paralaxei Soarelui și
unității astronomice:

$$p_0 = 8'',794, \qquad 1 \text{ UA} = 149{,}6 \cdot 10^6 \text{ km} \qquad (4.19)$$

2°. **Paralaxa anuală și determinarea distanțelor stelare.** Mișcarea Pămîntului în jurul Soarelui atrage după sine o deplasare paralactică aparentă a stelelor, deplasare foarte mică, care s-a putut măsura abia în secolul XIX (Struve, 1838), cînd instrumentele astronomice au permis măsurarea unghiurilor de ordinul zecimilor de secundă de arc.

Datorită mișcării anuale, raza Pămînt-Soare se deplasează, deci variază unghiul sub care ea este văzută din stea (σ, fig. 4.6). De aceea, se ia valoarea lui maximă, care se obține în momentul cînd raza vizuală este perpendiculară pe raza orbitei terestre.

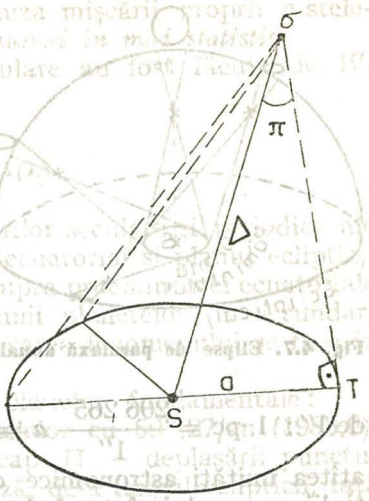


Fig. 4.6. Paralaxa anuală a stelelor.

Se numește *paralaxă anuală* sau *heliocentrică* a unei stele unghiul sub care se vede din stea raza medie a orbitei terestre cînd ea este perpendiculară pe direcția Pămînt-stea.

Fie steaua în σ, Soarele în S, Pămîntul în T (fig. 4.6). Din triunghiul dreptunghic σST avem:

$$\sin \pi = \frac{a}{\Delta}, \qquad (4.20)$$

unde $a = 1$ UA, iar Δ — distanța de la centrul Soarelui la centrul stelei σ.

Avînd în vedere faptul că paralaxele heliocentrice ale stelelor sînt mai mici decît 1", din formula (4.20) rezultă *formula pentru calculul distanțelor stelelor*:

$$\Delta = \frac{206\,265''}{\pi''} a = \frac{206\,265''}{\pi''} \text{ UA}; \qquad (4.21)$$

distanța Δ se obține în aceleași unități în care este exprimată și distanța a.

Observăm că în cazul cînd steaua σ se află în direcția polului ecliptic, unghiul π se exprimă prin $\operatorname{tg} \pi = \frac{a}{\Delta}$ și, deoarece π este mic, se regăsește aceeași formulă (4.21).

Determinarea paralaxelor stelare se face *din observații* efectuate în punctele orbitei Pămîntului care sînt separate de 6 luni interval unul după altul, obținîndu-se dublul paralaxei anuale.

Paralaxele stelare determinate pe baza deplasării paralactice a stelei se numesc *paralaxe trigonometrice*. Cele mai perfecționate instrumente de măsurat unghiuri permit determinarea paralaxelor stelare cu o eroare de $\pm 0'',01$. Azi se cunosc paralaxele la aproximativ 10 000 de stele.

Existența dovedită prin observații a paralaxei anuale a stelelor, ca și a *elipselor de paralaxă anuală* descrise în cursul unui an (fig. 4.7), constituie încă o *dovadă directă a mișcării anuale a Pămîntului în jurul Soarelui*. Această mișcare a observatorului impune *corecția de paralaxă anuală* în coordonatele ecuatoriale și ecliptice ale stelelor, adică trecerea de la coordonatele geocentrice la cele heliocentrice.

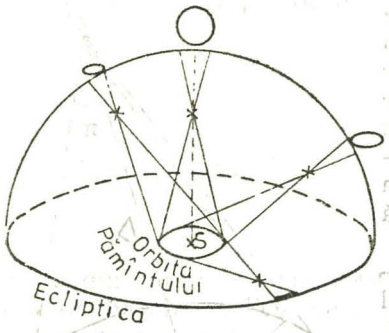


Fig. 4.7. Elipse de paralaxă anuală.

Distanța stelei celei mai apropiate, Proxima Centauri, avînd paralaxa heliocentrică maximă ($\pi = 0'',76$), va fi, conform formulei (4.21):

$$\Delta = \frac{206\,265''}{0'',76}\, a = 272\,000\, a = 272\,000 \text{ UA}.$$

Se vede că *unitatea astronomică* (UA), definită mai înainte, este o distanță prea mică pentru exprimarea distanțelor stelare.

Din acest motiv s-a ales o nouă unitate de distanță, *parsecul*. Parsecul (pc) este distanța corespunzătoare unei paralaxe de $1''$: $1 \text{ pc} = \frac{206\,265''}{1''}\, a = 206\,265$ UA, adică într-un parsec sînt exact atîtea unități astronomice cîte secunde de arc sînt într-un radian. Multiplii parsecului sînt: 1 kpc $= 10^3$ pc, 1 Mpc (megaparsec) $= 10^6$ pc.

O unitate răspîndită pentru distanțe este *anul lumină* (a.l.), adică distanța străbătută de raza de lumină, cu viteza de aproximativ $3 \cdot 10^5$ km/s, timp de un an: 1 a.l. $= 9{,}460 \cdot 10^{12}$ km $= 63\,240$ UA $= 0{,}3067$ pc, sau: 1 pc $= 30{,}86 \cdot 10^{12}$ km $= 206\,265$ UA $= 3{,}26$ a.l.

În aceste unități de lungime, *distanțele se pot exprima cu ajutorul următoarelor formule simple.*

$$\Delta = \frac{1}{\pi''} \text{ pc} \qquad (4.22)$$

și

$$\Delta = \frac{3{,}26}{\pi''} = \text{a.l.} \qquad (4.23)$$

3°. Paralaxa secular a stelelor. Se admite că stelele „fixe", în ansamblul lor, formează un sistem de referință invariabil, dar față de acest sistem (centrul de masă al sistemului) fiecare stea este animată de o mișcare pe care o putem considera rectilinie și uniformă. Astfel, și *Soarele*, împreună cu sistemul solar, are o mișcare de translație către punctul sferei cerești numit *apexul solar*, aflat în constelația Hercule ($\alpha = 270°$, $\delta = +30°$) cu o viteză $V_\odot \simeq 20$ km/s. De aici o deplasare lentă a stelelor spre *antapex*, căreia îi corespunde o *paralaxă secular* a stelelor (fig. 4.8).

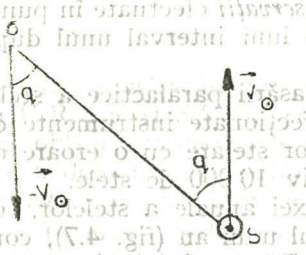


Fig. 4.8. Mișcarea aparentă a stelei spre antapex cauzată de mișcarea Soarelui spre apexul solar.

La aceasta se adaugă deplasarea particulară a fiecărei stele într-o anumită direcție, deplasare numită *mișcare proprie* (§ 4.5), care este cu atît mai mare cu cît steaua este mai aproape. De aceea ca *repere fixe* se iau *stelele foarte slabe*, care statistic sînt foarte îndepărtate.

Prin intermediul paralaxelor seculare avem o nouă posibilitate pentru determinarea distan-

ţelor stelelor pe cale trigonometrică. Din cauza mişcării proprii a stelelor, însă, această metodă se poate aplica *numai în mod statistic.*

Primele determinări ale paralaxelor seculare au fost făcute de *W. Herschel* în 1783.

§ 4.4. PRECESIA ŞI NUTAŢIA

Precesia şi nutaţia sînt efecte ale deplasărilor seculare şi periodice ale planelor fundamentale de coordonate (planul ecuatorial şi planul ecliptic), datorate acţiunii comune a Lunii şi Soarelui asupra proeminenţei ecuatoriale a Pămîntului (în principal), precum şi acţiunii planetelor (în secundar) asupra mişcării heliocentrice a acestuia. Explicarea fenomenului se face în cadrul mecanicii cereşti.

Următoarele fapte dovedesc deplasarea planelor fundamentale:

1) Creşterea longitudinilor cereşti ale stelelor cu 50″,27/an (1983,0), care se datorează — aşa cum am văzut în cap. II — deplasării punctului vernal ♈ în sens retrograd, cu aceeaşi viteză, de-a lungul eclipticii, faţă de stelele „fixe". Rezultă că şi polul ceresc P (respectiv P′) se deplasează cu aceeaşi perioadă, descriind un cerc mic (de rază ε) în jurul polului ecliptic Π (respectiv Π') (fig. 4.9).

2) Descreşterea lentă, în prezent cu 0″,47/an, a înclinării eclipticii pe ecuator, care se datorează deplasării poziţiei planului eclipticii (deci şi a punctului vernal) în lungul ecuatorului ceresc, fapt verificat de observaţii îndelungate.

Ca urmare a deplasării lente a polilor eclipticii faţă de stelele „fixe", polii lumii descriu pe bolta cerească, în jurul polilor de acelaşi fel ai eclipticii, nu cercuri, ci curbe deschise (spirale).

Ambele aceste dovezi determină fenomenul de *precesie*. Deplasarea în lungul eclipticii a punctelor echinocţiale se numeşte *precesie luni-solară*, iar cea în lungul ecuatorului ceresc — *precesie planetară*. Rezultanta celor două componente dă *precesia generală (în longitudine)*, a cărei valoare în prezent însumează 50″,27 pe an.

3) În 1747, J. Bradley a constatat că polul nord (deci şi axa de rotaţie a Pămîntului) are o deplasare periodică, cu aceeaşi perioadă ca şi perioada retrogradării nodurilor orbitei lunare (18,6 ani). Acest fenomen a fost numit *nutaţie*. Polul lumii, care se mişcă în urma precesiei, numit şi *polul mediu*, este centrul unei elipse pe care *polul adevărat* se mişcă în sens retrograd (fig. 4.10). Semiaxele elipsei sînt: cea îndreptată spre Π de 9″,21, iar cealaltă de 6″,86. Nutaţia produce o deplasare foarte mică a punctului vernal, de unde variaţia corespunzătoare a longitudinilor stelelor, latitudinile rămînînd neschimbate.

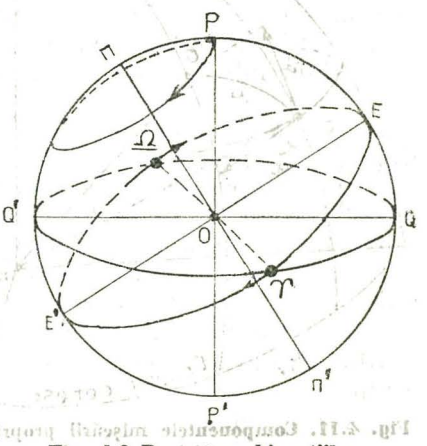


Fig. 4.9 Precesia echinocţiilor.

Ulterior s-a descoperit că polul ceresc adevărat mai execută încă două mişcări periodice foarte mici: una avînd perioada de o jumătate de an, iar cealaltă de o jumătate de lună. Astfel, prin

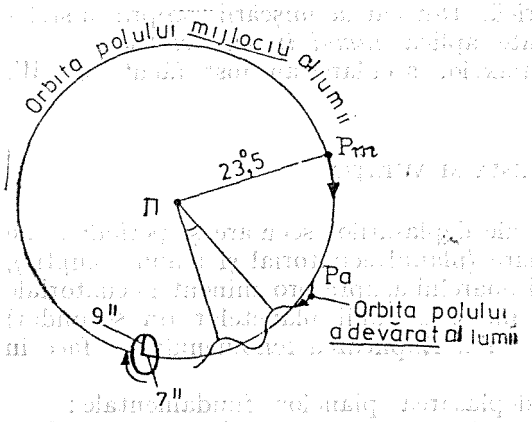


Fig. 4.10. Fenomenul nutației.

fenomenul de nutație se înțelege astăzi ansamblul tuturor oscilațiilor periodice ale polului lumii.

Corecțiile coordonatelor ecuatoriale și ecliptice pe seama fenomenului de precesie și nutație au expresii complicate, o serie de parametri din formulele respective publicîndu-se, pentru ușurarea calculelor, în anuarele astronomice.

§ 4.5. MIȘCĂRILE PROPRII ALE STELELOR

Comparînd *coordonatele ecuatoriale* (α, δ) ale unora și acelorași stele, determinate precis la mari intervale de timp, de ordinul zecilor de ani, s-a pus în evidență faptul că ele *variază cu timpul*. O bună parte din aceste variații se datorează precesiei, nutației, aberației luminii și, într-o măsură mai mică, paralaxei anuale. Dacă eliminăm influența acestora, variațiile coordonatelor vor fi diminuate, dar nu vor dispărea cu totul. Deplasarea „rest" a stelei pe sfera cerească timp de un an se numește *mișcare proprie*; ea se exprimă în secunde de arc pe an.

Cu alte cuvinte, *mișcarea proprie a stelei* σ este unghiul sub care s-ar vedea din Soare deplasarea anuală a stelei pe sfera cerească (fig. 4.11); ea se notează cu μ.

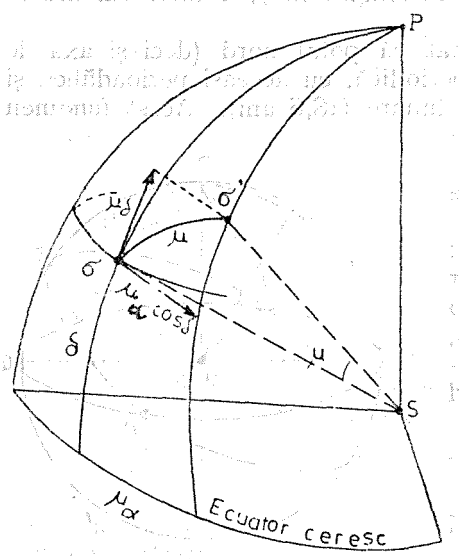


Fig. 4.11. Componentele mișcării proprii a stelei.

Mișcările proprii ale diferitelor stele sînt diferite în mărime, direcție și sens. Cea mai mare mișcare proprie o are *steaua Barnard* ($\mu = 10'',27$/an) care, din acest motiv, se și numește „stea zburătoare". Cîteva zeci de stele au $\mu > 1''$, imensa majoritate a mișcărilor proprii măsurate fiind de ordinul sutimilor și miimilor de secundă de arc pe an.

Mișcarea proprie a fiecărei stele se efectuează după un arc de cerc mare și cu o viteză constantă; aceasta arată că mișcarea lor în spațiu se face în linie dreaptă și uniform. Unele mici abateri periodice de la arcul de cerc mare în mișcările proprii au fost puse în evidență numai la cîteva stele.

În urma mișcării proprii a stelei $\sigma(\mu)$ pe arcul de cerc mare $\sigma\sigma'$ (fig. 4.11), ascensia dreaptă a stelei (α) se va modifica cu mărimea $\mu_\alpha =$

$= \Delta\alpha/\Delta t$ — numită *mişcarea proprie în ascensia dreaptă*, iar declinaţia (δ) — cu mărimea $\mu_\delta = \Delta\delta/\Delta t$ — numită *mişcarea proprie în declinaţie*. La compararea coordonatelor stelei, determinate la mari intervale de timp, se obţin tocmai aceste mărimi.

Avînd în vedere valorile numerice posibile ale mărimii μ, arcul paralelului diurn al stelei $\mu_\alpha \cos\delta$, arcul cercului de declinaţie a stelei μ_δ şi arcul mişcării proprii a stelei μ pot fi considerate linii drepte concurente în σ şi din fig. 4.11 rezultă următoarea *formulă pentru calculul mişcării proprii a stelei*:

$$\mu = \sqrt{(\mu_\alpha \cos\delta)^2 + \mu_\delta^2} = \sqrt{(15\ \mu_\alpha^s \cos\delta)^2 + \mu_\delta^2}, \qquad (4.24)$$

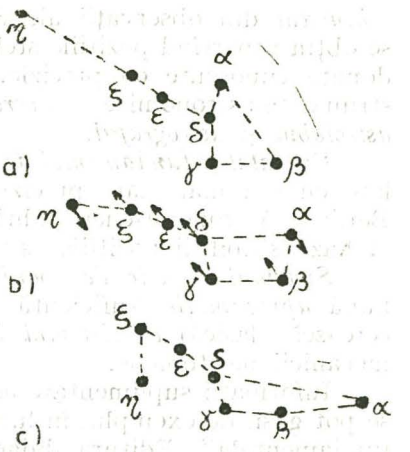


Fig. 4.12. Schimbarea configuraţiei constelaţiei Ursa Mare pentru 100 000 ani.

unde μ^s înseamnă că mărimea μ_α este exprimată în unităţi de timp, cum este exprimată de obicei şi α.

În urma mişcărilor proprii ale stelelor, pentru intervale foarte mari de timp, forma constelaţiilor se schimbă vizibil. În fig. 4.12 am reprezentat, spre exemplu, forma constelaţiei Ursa Mare cu 50 000 de ani în urmă (a), în prezent (b) şi peste 50 000 de ani (c).

§ 4.6. PROBLEMELE ASTRONOMIEI (ASTROMETRIEI) FUNDAMENTALE

Încă din cele mai vechi timpuri a apărut necesitatea de a reprezenta sfera cerească pe globuri sau atlase formate din hărţi ce acoperă părţi ale globului, sau de a cataloga stelele, la început după constelaţii, iar mai tîrziu după sisteme cereşti de referinţă.

Problema determinării unui sistem de referinţă — adică a unui sistem de axe şi plane fundamentale, la care să se poată raporta mişcarea corpurilor din sistemul solar şi din afara acestuia — se poate însă rezolva numai prin alegerea unor *repere materiale* ale căror coordonate faţă de axele şi planele alese să le definească poziţiile. Alcătuirea unui asemenea sistem, care se materializează *sub forma unui catalog de stele*, este una din problemele astronomiei fundamentale.

Cataloagele de stele cuprind coordonatele ecuatoriale (α, δ) ale unui număr mare de stele repartizate pe toată sfera cerească, mişcările proprii asociate (μ), raportate la acelaşi sistem de referinţă şi epocă, distanţa (Δ), viteza radială (V_r) şi cîteva caracteristici fizice necesare identificării stelelor. Cataloagele stelare cuprind, de asemenea, valorile numerice ale constantelor astronomice fundamentale (constanta aberaţiei, constanta precesiei generale, constanta nutaţiei, unitatea astronomică, parsecul etc.), care stau la baza definirii variaţiei în timp a sistemului de referinţă.

Datele necesare realizării cataloagelor de stele sînt obţinute din observaţii absolute sau diferenţiale ale stelelor: *observaţiile absolute* se obţin determinînd coordonatele stelelor în raport cu un sistem de referinţă în care *ecuatorul* se obţine din distanţele zenitale măsurate ale stelelor, iar

echinoxul din observații ale Soarelui; *observațiile diferențiale sau relative* se obțin raportînd pozițiile stelelor la o *rețea de stele fundamentale* cu coordonate cunoscute cu precizie. Observațiile se efectuează cu diferite instrumente astronomice ca: *cercul meridian, cercul vertical, luneta de treceri, astrolabul* și *astrograful.*

Un *catalog fundamental de stele,* cuprinzînd coordonatele stelelor, calculate cu cea mai mare precizie posibilă, este „Fundamental Katalog des Berliner Astronomischen Jahrbuch (FK 4)", care conține 1553 stele, stînd la baza stabilirii pozițiilor stelelor cuprinse în *anuarele astronomice.*

Sistemul practic de coordonate dat de catalogul fundamental este o bună *aproximație* (suficientă pentru rezolvarea problemelor de mecanică cerească clasică) *la sistemul inerțial teoretic,* stabilit pe baza principiilor mecanicii newtoniene.

Informații suplimentare asupra diferitelor aspecte ale acestei probleme se pot găsi, de exemplu, în lucrările prof. *N. I. Dinulescu* — „Astronomie fundamentală", Editura didactică și pedagogică, București, 1968; și *M. Liculescu* — „Sisteme cerești de referință", în Anuarul astronomic '83, Editura Academiei R.S.R., București, 1982.

În țara noastră, Observatorul din București a publicat catalogul stelar de poziție „Bucharest KSZ Catalogue of faint stars for 1950", care reprezintă contribuția sa (zona de declinație $-11°$, $+11°$) la problema stabilirii sistemului inerțial de referință în astronomie; conținînd 3939 stele slabe, el este un rod al colaborării cu Observatorul Central din Pulkovo (U.R.S.S.). *Observatorul din Cluj,* înființat în 1920, a luat parte, începînd cu 1933, sub conducerea primului său director, *prof. Gh. Bratu* (1881—1941), la întocmirea „Catalogului hărții fotografice a Cerului", lucrare condusă de Observatorul din Paris, celui din Cluj revenind reducerea clișeelor fotografice pentru zona de 20°, rezultatele acestei colaborări fiind publicate în lucrarea „Catalogue de 11 755 étoiles de la zone $+17°$ a $+25°$ et de magnitudes 9,5 à 10,5. Publications de l'Observatoire de Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1950".

*

În afara cataloagelor stelare (de poziții, de străluciri, spectrale), există astăzi numeroase cataloage ale altor obiecte cerești: cataloage de nebuloase și roiuri stelare; cataloage de radiosurse; precum și cataloage de galaxii și roiuri de galaxii.

*

Problema instituirii *timpului uniform* în astronomie — o altă problemă a astrometriei fundamentale — va fi prezentată în capitolul următor.

CAPITOLUL V

TIMPUL ŞI MĂSURAREA LUI

§ 5.1. CONSIDERAŢII GENERALE

Spaţiul, timpul şi masa sînt *noţiunile fundamentale* ale mecanicii. În acest capitol ne referim, în special, la problema *măsurării timpului*, a *instituirii unităţilor de timp* pentru exprimarea duratelor fenomenelor astronomice.

Formă de existenţă a materiei în mişcare, timpul este o mărime imaterială. Neputîndu-se realiza un etalon material de timp, ca în cazul celorlalte mărimi fundamentale (lungime, masă), timpul, pentru a fi măsurat, trebuie *raportat la un fenomen material.* Încă *Epicur* (sec. IV î.e.n.) susţinea că „timpul nu există în sine, prin sine, ci doar prin intermediul unor obiecte perceptibile". Iar *Engels* arăta că a fi în spaţiu înseamnă a exista „în aşezarea lucrurilor unul lîngă altul", pe cînd a fi în timp înseamnă a exista „în succesiunea lor unul după altul".

Se defineşte *scara de timp* ca fiind un ansamblu format dintr-un *fenomen material măsurabil*, permanent şi stabil, şi dintr-o *teorie*, care dă desfăşurarea acestui fenomen în funcţie de o *variabilă independentă.* Această variabilă independentă a desfăşurării fenomenului joacă rolul *timpului. Unitatea de timp* este o valoare convenţională atribuită unei durate date din evoluţia fenomenului de referinţă, la care, cu ajutorul teoriei, putem raporta orice altă durată. *Determinarea timpului* în această scară constă, deci, în măsurarea fenomenului fundamental şi, în *comparaţie cu teoria*, deducerea valorii timpului, *t* (citind „indicaţiile" *orologiului*).

În Univers există multe fenomene evolutive cărora le putem asocia cîte o *scară de timp uniform.* În fiecare caz, *criteriul de uniformitate* este următorul: *legile mecanicii newtoniene* (cap. VII) *trebuie să fie verificate, dacă considerăm drept variabilă independentă timpul, t,* un parametru cu variaţie continuă şi uniformă *(timp inerţial).*

Una din problemele fundamentale ale astronomiei este să găsească şi să studieze *mişcări uniforme* (sau cel puţin aproape uniforme), acele *orologii naturale* care să poată servi la măsurarea timpului.

În prezent, măsurarea timpului se bazează pe *următoarele mişcări:*

(1) *Mişcarea de rotaţie a Pămîntului,* deci şi *mişcarea aparentă diurnă a sferei cereşti,* considerîndu-se uniformă. Timpul dedus din această mişcare se numeşte *timp terestru.*

(2) *Mişcarea orbitală a Pămîntului şi a Lunii,* deci şi mişcarea aparentă a Soarelui şi a Lunii în jurul Pămîntului, dovedindu-se mai potrivită decît mişcarea de rotaţie în jurul axei. Timpul bazat pe această mişcare, numit

timpul efemeridelor, reprezintă, cu suficientă aproximație, timpul uniform al mecanicii newtoniene, t.

Totuși, *în mod practic*, și rotația Pămîntului poate fi considerată ca o scară de timp uniform, dacă se ține cont de efectele perturbatoare datorate Lunii, Soarelui și planetelor în această mișcare. Dar acest timp terestru poate fi utilizat numai pentru un interval mai scurt, de ani sau chiar numai de cîteva luni.

Soluția ideală ar fi stabilirea unui etalon fizic independent de constantele astronomice. Orologiile cu cuarț și atomice, care determină ziua cu o precizie de 10^{-9} — 10^{-11}, sînt pași mari în această direcție; pe cale astronomică ziua se determină cu o precizie de numai 10^{-7}.

În cele ce urmează vom expune succint cele două categorii de timp: *timpul astronomic* și *timpul fizic*.

§ 5.2. TIMPUL ASTRONOMIC: TIMPUL TERESTRU ȘI TIMPUL EFEMERIDELOR

Timpul astronomic, definit cu ajutorul fenomenelor astronomice, este — așa cum s-a menționat mai sus — de două feluri: timpul terestru și timpul efemeridelor.

1°. **Timpul terestru: timpul sideral și timpul solar.** Timpul terestru este timpul definit cu ajutorul mișcării aparente diurne a sferei cerești, mișcare cauzată de rotația Pămîntului în jurul axei sale. Dacă rotația diurnă a sferei cerești se studiază *prin mișcarea diurnă a stelelor*, se definește *timpul sideral*. Datorită însă faptului că *stelele au și mișcări proprii*, care în majoritatea cazurilor nu sînt suficient de bine cunoscute, s-a convenit să se studieze mișcarea diurnă a sferei cerești *prin mișcarea diurnă a punctului vernal* (♈), ale cărui mici deplasări pe sfera cerească sînt bine studiate (cap. IV). *Mișcarea aparentă diurnă și anuală a Soarelui*, consecință a mișcării de rotație și de revoluție a Pămîntului, definește *timpul solar*. În ambele cazuri, practic, *timpul se definește prin unghiul orar al unui reper*. În primul caz, reperul este punctul vernal, în cel de-al doilea — Soarele.

Într-adevăr, *modelul matematic* al desfășurării fenomenului de mișcare diurnă a stelei (punctului vernal) sau a Soarelui în raport cu timpul (t), *în sistemul de coordonate orare* (δ, H) se exprimă astfel:

$$\delta = \text{const.}, \qquad H = f(t) = \omega_{rot} \cdot t, \tag{5.1}$$

unde ω_{rot} — viteza unghiulară de rotație a Pămîntului, considerată constantă ($= 15°/\text{h}$).

Într-un interval de timp bine definit, avînd o corespondență biunivocă între H și t, după inversarea funcției $f(t)$ obținem:

$$t = f^{-1}(H) = \frac{1}{\omega_{rot}} \cdot H, \tag{5.2}$$

adică din măsurările de poziții ale aștrilor de reper se poate determina timpul.

(1) *Timpul sideral. Unitatea* de măsură a timpului sideral este *ziua siderală*: intervalul de timp dintre două treceri consecutive ale punctului

vernal la meridianul superior (sau inferior) al *locului de observație*. Ca *început* al zilei siderale la un meridian geografic dat se ia momentul culminației superioare a punctului vernal. Se înțelege că ziua siderală este o noțiune locală: ea începe, pentru două localități cu meridiane diferite, în momente fizice diferite. Ziua siderală se împarte în 24 de ore siderale, 24 × 60 minute siderale și 24×60× × 60 secunde siderale.

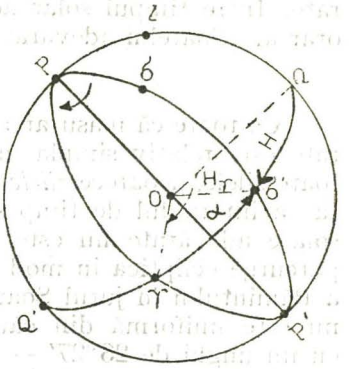


Fig. 5.1. Legătura timpului sideral cu ascensia dreaptă și unghiul orar al unui astru (σ).

Numim *timp sideral* intervalul de timp scurs de la începutul zilei siderale pînă la un alt moment oarecare, interval exprimat în ore, minute și secunde siderale. Se înțelege că, din cauză că rotația diurnă a sferei cerești este uniformă (în primă aproximație), *timpul sideral* la un moment dat este exprimat prin același număr de ore, minute și secunde prin care este exprimat (în unități de timp) unghiul orar al punctului vernal. Din acest motiv, *unghiul orar al punctului vernal* (Υ) *este numit* (de fapt, impropriu) *timp sideral*, adică:

$$t_s \equiv \theta = H_\Upsilon^{\text{hmins}} \tag{5.3}$$

Deoarece H_Υ nu se poate măsura direct, practic, pentru determinarea timpului sideral θ la un moment oarecare, trebuie să măsurăm unghiul orar H al unui astru oarecare σ, a cărui ascensie dreaptă α este cunoscută. Atunci, din (5.3) și fig. 5.1 rezultă, pentru orice moment și orice astru, formula:

$$\theta = H_\Upsilon = \alpha + H, \tag{5.4}$$

formulă folosită și în cap. II.

Cel mai bun mijloc de a determina ora siderală (θ) constă în observarea, la meridianul locului, a stelelor fundamentale (cap. IV), a căror ascensie dreaptă este cunoscută cu mare precizie.

Timpul sideral *(adevărat)*, nefiind uniform, este înlocuit cu *timpul sideral mediu*, determinat prin unghiul orar al *punctului vernal mediu* (neafectat de fenomenul de nutație).

Pentru păstrarea timpului sideral se folosesc *orologii siderale*, instrumente care indică timpul sideral.

Timpul sideral este convenabil pentru problemele de astronomie, dar este incomod pentru viața practică, care se călăuzește după Soare.

(2) *Timpul solar*. Avem următoarele sisteme de timp solar:

— *timpul solar adevărat*: se definește cu ajutorul centrului discului solar (numit „*Soare adevărat*": ⊙). Unitatea de timp solar adevărat este *ziua solară adevărată*: intervalul de timp dintre două treceri consecutive ale „Soarelui adevărat" la meridianul superior (sau inferior) al locului. Ca *început* al zilei solare adevărate se ia, în practică, nu momentul culminației superioare (*amiaza* adevărată), ci al celei inferioare a „Soarelui adevărat" (*mieznul nopții* adevărate).

Intervalul de timp scurs între începutul zilei solare adevărate și nu alt moment oarecare se numește *timpul solar adevărat*; el se exprimă în subdiviziunile zilei solare adevărate: ore, minute și secunde solare adevă-

rate. Între timpul solar adevărat t_a, în fiecare loc și moment, și unghiul orar al „Soarelui adevărat" $H_\odot$ există relația:

$$t_a = H_\odot^{\text{hmins}} + 12^h \tag{5.5}$$

Cu toate că măsurarea timpului în zile și fracțiuni de zile solare adevărate este relativ simplă, nici acest timp nu este potrivit pentru viața de toate zilele, deoarece *zilele solare adevărate nu sînt egale între ele*, adică cerința ca intervalul de timp să fie constant nu este îndeplinită. Durata zilei solare adevărate nu este constantă din *două cauze*: a) Soarele adevărat parcurge ecliptica în mod neuniform — datorită mișcării reale neuniforme a Pămîntului în jurul Soarelui, și b) mișcarea lui diurnă în jurul axei lumii nu este uniformă din cauza înclinării eclipticii față de ecuatorul ceresc cu un unghi de 23°27′ — datorită faptului că axa de rotație a Pămîntului este înclinată, cu același unghi, față de planul orbitei sale.

Pentru a obține *zile de durată constantă* și legate totodată de mișcarea Soarelui, în astronomie se definește:

— *timpul solar mediu*, care este timpul solar adevărat corectat de inegalitățile sale amintite mai sus. Noul timp se definește cu ajutorul unui punct fictiv, numit *„Soare mediu ecuatorial"* ($\odot_{me}$), care se află în mișcare uniformă pe ecuator și trece prin punctul vernal deodată cu „Soarele adevărat".

Se numește *zi solară medie* sau, mai scurt, *zi medie* intervalul de timp dintre două culminații consecutive de același fel ale „Soarelui mediu ecuatorial" la un același meridian geografic. Ea se împarte în 24 de ore medii, 24 × 60 minute medii și 24 × 60 × 60 secunde medii. *Începutul* zilei solare medii coincide cu momentul culminației inferioare a „Soarelui mediu ecuatorial", adică cu *miezul nopții mediu*.

Timpul scurs de la începutul zilei solare medii pînă la un moment oarecare, exprimat în ore, minute și secunde solare medii, se numește *timp solar mediu*, în momentul și locul considerat. Între timpul solar mediu t_m și unghiul orar al „Soarelui mediu ecuatorial" $H_{\odot_{me}}$ avem, în conformitate cu definițiile, relația:

$$t_m = H_{\odot_{me}}^{\text{hmins}} + 12^h \tag{5.6}$$

(3) *Ecuația timpului. Diferența* $t_m - t_a$ se numește *ecuația timpului* și se notează cu E (prin „ecuație" aici se înțelege „corecție"); ea se determină pe baza teoriei mișcării aparente a Soarelui, calculîndu-se în funcție de timpul uniform, ascensiile drepte $\alpha_\odot$ și $\alpha_{\odot_{me}}$ ale Soarelui, și se publică în anuare astronomice pentru fiecare zi a anului.

Pentru păstrarea timpului solar se folosesc *orologii care indică timpul solar mediu*.

(4) *Legătura dintre unitățile de timp mediu și de timp sideral* se stabilește astfel: În decursul unui an tropic, punctul vernal execută n rotații retrograde. În același timp, datorită mișcării sale anuale aparente (asemănător mișcării Soarelui pe ecliptică), „Soarele mediu ecuatorial" va efectua, deplasîndu-se spre est cu $\simeq 1°$ pe zi ($3^{min}\ 56^s$), $n-1$ rotații retrograde. Rezultă deci că $(n-1)$ rotații medii $= n$ rotații siderale. Cu alte cuvinte:

$$365{,}2422 \text{ zile solare medii} = 366{,}2422 \text{ zile siderale}, \tag{5.7}$$

de unde rezultă:

$$24 \text{ ore siderale} = 23^h\ 56^{min}\ 4{,}091^s \text{ de timp solar mediu}; \tag{5.8}$$

$$24 \text{ ore solare medii} = 24^h\ 3^{min}\ 56{,}555^s \text{ de timp sideral}. \tag{5.9}$$

2°. Diverse sisteme de măsură a timpului

(1) *Timpul local.* Subliniem faptul că timpurile definite pînă acum, sideral (adevărat şi mediu) şi solar (adevărat şi mediu), fiind definite prin unghiuri orare, pentru meridianul geografic al locului de observaţie, sînt *timpuri locale.* Se înţelege că pentru toate localităţile situate pe acelaşi meridian geografic timpurile locale de acelaşi fel, în acelaşi moment fizic, sînt egale.

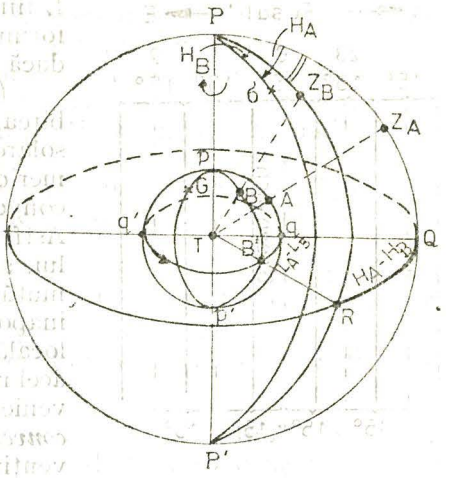


Fig. 5.2. Pentru teorema „diferenţa unghiurilor orare este egală cu diferenţa longitudinilor geografice".

Se pune *problema schimbării timpului de acelaşi fel cu schimbarea longitudinii.* Fie două localităţi pe glob, A şi B, de longitudini geografice L_A şi L_B (faţă de meridianul pGp' de la Greenwich). Să notăm cu $P\sigma P'$ (fig. 5.2) cercul orar al astrului σ, observat simultan în localităţile A şi B, stabilindu-i-se unghiurile orare respective H_A şi H_B, pe sfera cerească geocentrică.

Din construcţia geometrică (fig. 5.2), se vede că *diferenţa unghiurilor orare ale unui astru oarecare σ, măsurate la acelaşi moment fizic în două puncte diferite ale suprafeţei terestre, este egală numeric cu diferenţa longitudinilor geografice ale localităţilor respective,* adică:

$$H_A - H_B = L_A - L_B \tag{5.10}$$

Aplicînd *această teoremă la fiecare timp local,* pe baza formulelor (5.3), (5.5) şi (5.6), obţinem:

$$\begin{aligned} \theta_A - \theta_B &= L_A - L_B \\ t_{aA} - t_{aB} &= L_A - L_B \\ t_{mA} - t_{mB} &= L_A - L_B \end{aligned} \tag{5.11}$$

Deci *diferenţa timpurilor de acelaşi fel pentru două localităţi,* corespunzînd aceluiaşi moment fizic, *este egală cu diferenţa longitudinilor geografice ale localităţilor, exprimată în unităţi de timp.*

(2) *Timpul universal.* Se numeşte *timp universal* TU (sau GMT = Greenwich Mean Time, sau T_0) timpul solar mediu al meridianului localităţii Greenwich *(meridianul zero)*:

$$TU = t_{mG} \tag{5.12}$$

Acest timp este unic pe întreaga suprafaţă terestră şi este larg folosit în astronomie pentru notarea momentelor observaţiilor şi pentru calcule de efemeride.

Cunoscînd timpul universal, *timpul solar mediu local* al oricărui punct de pe glob (de longitudine L) se obţine după formula:

$$t_m = TU + L, \tag{5.13}$$

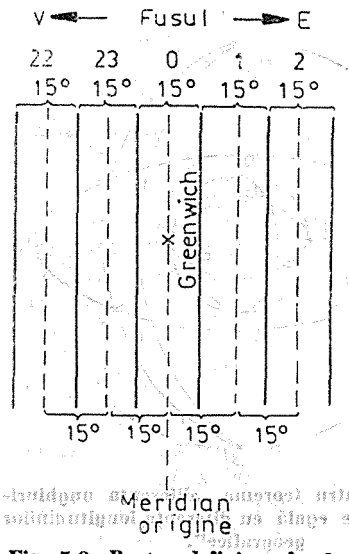


Fig. 5.3. Pentru definirea fuselor orare.

L fiind exprimată în unități de timp; această formulă se obține din a treia formulă (5.11), dacă punem $t_{mA} = t_m$, $t_{mB} = TU$, $L_A = L$, $L_B = 0$.

(3) *Fusele orare și timpul legal.* Deosebirea, în același moment fizic, a timpurilor solare medii locale ale punctelor situate pe meridiane geografice diferite ar introduce inconveniente în folosirea timpului solar mediu. Astfel, deplasîndu-ne pe suprafața Pămîntului, spre răsărit sau apus, am fi nevoiți să mutăm mereu acele ceasornicului (înainte sau înapoi), pentru a avea în fiecare moment ora locală a meridianului pe care-l traversăm în acel moment. Pentru înlăturarea acestui inconvenient, s-a adoptat în anul 1884 așa-numita *convenție a fuselor orare*. Conform acestei convenții, suprafața globului terestru a fost împărțită în 24 de *fuse orare* de cîte 15° longitudine geografică în lărgime (fig. 5.3). Toate localitățile din interiorul unui fus au același timp, timpul solar mediu al meridianului lor median. În acest fel, diferența dintre ora fusului și ora locală nu depășește $\pm 30^{min}$.

Se numește *ora fusului* sau *timpul legal* timpul solar mediu al meridianului median al fusului orar respectiv. Fusul inițial *(fusul zero)* are ca meridian median meridianul zero și ora fusului este chiar TU, fusul 1 — meridianul de 15° longitudine geografică, fusul 2 — meridianul de 30° longitudine geografică ș.a.m.d., diferența timpurilor lor față de timpul universal fiind de 0, 1, 2, . . . ore întregi. Deci ora fusului n este legată de timpul universal prin relația evidentă:

$$T_n = TU + n^h, \qquad (5.14)$$

unde n este numărul de ordine al fusului orar. Dacă se trece dintr-un fus orar în fusul limitrof la răsărit sau la apus, acele ceasului se mută cu o oră înainte, respectiv înapoi.

Țara noastră, aflîndu-se în fusul $n = 2$, are ora Europei Orientale: $T_2 = TU + 2^h$. Pentru o țară, timpul legal este de regulă timpul fusului capitalei sale. Astfel, *timpul legal român este (și se numește) ora Bucureștiului.*

(4) *Timpul decretat și timpul de vară.* Din motive de ordin practic, printr-un decret al guvernului sovietic (1930), pe tot întinsul U.R.S.S., exceptînd cîteva regiuni, timpul legal a fost avansat cu o oră față de ora fusului. Acest timp se numește *timpul decretat*:

$$T_d = TU + (n + 1)^h \qquad (5.15)$$

Astfel, Moscova, deși se află în fusul orar 2, trăiește după ora fusului orar 3; timpul decretat al Moscovei se numește ora Moscovei. Ea este deci avansată față de ora Bucureștiului cu 1^h.

În unele țări din Europa, America etc., tot din considerente de ordin practic, ora se mută înainte cu o unitate numai pentru lunile de vară. În țara noastră, ora oficială de vară se aplică din anul 1979; în anul 1984, de exemplu, ea este aplicată de la 1 aprilie pînă la 30 septembrie.

(5) *Linia de schimbare a datei* (linia de demarcaţie). Folosirea fuselor orare a impus introducerea *liniei de schimbare a datei*, care coincide aproximativ cu *antimeridianul Greenwich*. Oricine traversează această linie:

— dacă merge spre est, la miezul nopţii care urmează după trecerea liniei, repetă data calendaristică (adică după 15 octombrie, de pildă, se va socoti tot 15 octombrie);

— dacă merge spre vest, la miezul nopţii care urmează după trecerea liniei, schimbă data cu două unităţi (adică după 15 octombrie va socoti 17 octombrie).

Rezultă că fiecare zi nouă pe Pămînt începe la vest la linia de schimbare a datei, adică pe teritoriul estic extrem al U.R.S.S. În particular, tot acolo are loc prima zi a anului, adică începutul fiecărui an nou.

Fusele orare şi ora oficială a diferitelor ţări, respectiv oraşe mai mari, sînt indicate în anuare astronomice.

2° **Timpul efemeridelor.** Dintr-o tratare riguroasă a problemei timpului rezultă că, faţă de timpul uniform, unitatea de timp solar mediu — ziua solară medie — nu este constantă, ci se lungeşte. Explicaţia constă, cum s-a amintit şi în §5.1, în neuniformitatea mişcării de rotaţie a Pămîntului (cap. III), care se pune în evidenţă prin neconcordanţa poziţiilor observate ale Lunii şi planetelor apropiate de Pămînt (Mercur şi Venus) cu poziţiile calculate (din *efemeride*) ale acestora.

Cerinţele astronomiei actuale impun ca unitatea de timp să fie determinată cu o eroare mai mică decît 10^{-9}. De aici nevoia *definirii unui alt timp, mai uniform*, adică a alegerii unei unităţi mai potrivite cu scara timpului uniform decît ziua solară medie.

Timpul efemeridelor, definit deja în §5.1 ca fiind argumentul din efemeridele Lunii şi planetelor, se determină cel mai bine din mişcarea relativ rapidă a Lunii: poziţiile observate ale Lunii, care se fixează în timpul neuniform *TU*, se compară cu poziţiile calculate din efemeride, care se obţin în timp uniform, şi se citeşte timpul corespunzător acestora din urmă (TE).

Legătura dintre timpul efemeridelor şi timpul universal se stabileşte în modul următor:

— se determină din observaţii timpul universal *TU*0, care se corectează cu deplasarea polului terestru instantaneu faţă de cel mediu, obţinîndu-se *TU*1;

— la *TU*1 se adaugă corecţia datorată variaţiei sezoniere a rotaţiei Pămîntului, şi se obţine timpul universal cvasiuniform *TU*2 (*TU*2 este cea mai bună aproximaţie la timpul uniform, pe care o putem obţine din observaţii asupra mişcării diurne a stelelor).

Pentru trecerea de la *TU* la *TE* se introduce următoarea *corecţie*, dată de formula empirică a lui *H. Spencer Jones*:

$$\Delta T = TE - TU = 24^s,349 + 72^s,318\ T + \\ + 29^s,950 \cdot T^2 + 1^s,821 \cdot B'', \qquad (5.16)$$

unde T este socotit în secole juliene (§5.5), de la momentul 1900 ianuarie 0, 12^h *TE*. În această formulă, primul termen asigură coincidenţa începutului zilelor efemeridelor cu începutul zilelor solare medii pentru anul 1900,0, al doilea este ales astfel ca durata zilelor efemeridelor să fie egală cu durata medie a zilelor solare medii, al treilea ţine cont de încetinirea seculară a rotaţiei Pămîntului, iar al patrulea conţine fluctuaţiile neregulate ale vitezei de rotaţie a Pămîntului ce se reflectă în longitudinea Lunii.

Fără a fi identic cu timpul uniform al mecanicii clasice, timpul efemeridelor răspunde, în limita preciziei observațiilor actuale, cerințelor mecanicii newtoniene tot atît de bine ca și primul.

Începînd din anul 1960, *efemeridele aștrilor se alcătuiesc avînd drept argument timpul efemeridelor*; pentru acel an, valoarea corecției ΔT a fost de $+34^s,0$; pentru anul 1984, valoarea preliminară a lui ΔT este de $+55^s,0$.

§ 5.3. TIMPUL FIZIC: TIMPUL ATOMIC INTERNAȚIONAL

Progresele fizicii în ultimele decenii au dus la descoperirea unor fenomene fizice ce se desfășoară uniform în timp. Ele au permis definirea *timpului fizic* — independent de observații astronomice —, ca și construirea orologiilor (ceasurilor) pentru determinarea și păstrarea lui.

(1) *Ceasurile cu cuarț* realizează primul dispozitiv bazat pe un fenomen fizic pentru determinarea timpului: frecvența unui cristal de cuarț tăiat după o secțiune principală, aflat într-un cîmp electric constant, se menține constantă timp îndelungat.

(2) *Ceasurile atomice* rezultă din asocierea unui etalon atomic cu un ceas cu cuarț, aservit lui.

Doi atomi ai aceluiași izotop, puși în condiții fizice similare, nu vor prezenta nici o diferență în absorbția sau emisia de energie a unei tranziții, asigurînd deci aceeași frecvență etalon. De aici — construirea etaloanelor de frecvență atomice, de mare stabilitate și reproductibilitate.

Deci ceasurile cu cuarț pot fi folosite pentru păstrarea orei, dar ele sînt controlate sau chiar aservite etaloanelor atomice.

S-au construit ceasuri atomice cu cesiu, rubidiu și în prezent cu maseri, cu hidrogen atomic etc. Precizia lor poate ajunge pînă la 10^{-13}.

*

Prin urmare, azi în astronomie se folosesc *trei scări de timp*:

— scara *timpului* (astronomic) *universal* (*TU*); dacă se cere o precizie mai bună decît $0^s,01$, trebuie specificată forma în care este folosit (*TU0*, *TU1* sau *TU2*);

— scara *timpului* (astronomic al) *efemeridelor* (*TE*), utilă pentru interpretarea observațiilor anterioare apariției timpului atomic; și

— scara *timpului atomic* (fizic) *internațional* (*TAI*); este bazată pe secunda internațională (SI — unitatea de timp din Sistemul Internațional de Unități), sub forma unei scări continue, începînd cu 1 ianuarie 1958.

Menționăm că *la baza difuzării coordonate a frecvențelor standard și a semnalelor orare* stă *scara timpului universal coordonat* (*TUC*); ea corespunde exact în viteză cu *TAI*, de care diferă printr-un număr întreg de secunde (salt pozitiv sau negativ de secunde) pentru a asigura o concordanță aproximativă cu *TU1*; această procedură se aplică de la 1 ianuarie 1972, corecțiile fiind aplicate la 1 ianuarie sau 1 iulie. (Pentru informații mai detaliate asupra acestei probleme, a se vedea „Anuarul astronomic '83", Ed. Acad. R.S.R., București, 1982.)

§ 5.4. UNITĂȚILE FUNDAMENTALE DE TIMP

Unitatea fundamentală de timp este *secunda*, pe care însă o definim diferit, după fenomenul stabil considerat:

— *pentru timpul universal, secunda* este 1/86 400 din ziua solară medie; variația ei de 10^{-7} este mai mare decît erorile de măsurare (10^{-9});

— *pentru timpul efemeridelor, secunda* este egală cu 1/31 556 925,975 din anul tropic 1900, 0 ianuarie 12^h *TE*, cu o precizie de cel mult 10^{-9};

— *pentru timpul atomic internațional, secunda* atomică este durata a 9 192 631 770 de perioade de radiație, corespunzînd tranziției între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale a unui atom de cesiu 133, neperturbat de cîmpurile exterioare electromagnetice, dar ținîndu-se seama de cîmpul gravitațional existent la suprafața geoidului. Asigură o precizie de 10^{-11} secunde.

*

Pentru nevoile practicii și științei, în diferite țări ale lumii sînt organizate *servicii* specializate *ale orei*. Un asemenea *servici orar modern* funcționează și în cadrul *Centrului de Astronomie și Științe Spațiale din București*. Acesta este dotat cu o lunetă reversibilă Zeiss (10—100 cm), cu oscilatoare cu cuarț Belin și Rhode und Schwartz și cu un post de radiorecepție a semnalelor orare. Prin sectorul său orar, Centrul de Astronomie și Științe Spațiale este colaborator permanent al Biroului Internațional al Orei (Paris) și al Serviciului Internațional al Mișcării Polului (Mizusawa, Japonia).

§ 5.5. CALENDARUL

Din cele mai vechi timpuri, omul a căutat în jurul său *repere* și *unități de măsură* pentru măsurarea timpului. Aceste repere au fost aștrii, iar unitățile de măsură — perioadele lor de mișcare.

Trei mișcări au influențat direct viața omului, fiecare din ele asigurîndu-i cîte o unitate de timp:

(1) Mișcarea diurnă aparentă a Soarelui i-a dat perioada ei, *ziua solară medie*, adică mica unitate de timp.

(2) Repetarea fazelor Lunii i-a dat *luna*, unitatea mijlocie de timp; această perioadă are la bază *revoluția sinodică a Lunii*, avînd o durată de 29,5306 zile medii (cap. VI).

(3) Repetarea perioadelor de vegetație (adică mișcarea anuală a Soarelui) i-a dat unitatea mare de timp, *anul*; această perioadă are la bază anul tropic avînd durata de 365,2422... zile medii.

Unitățile de timp de mai sus — ziua, luna și anul —, așa cum se vede din valorile lor numerice, *nu sînt comensurabile* una cu alta; aceasta înseamnă că nu putem găsi o unitate care să se cuprindă de un număr întreg de ori în celelalte unități.

*Problema calendarului** constă în a găsi o unitate convențională de timp — *anul calendaristic* — care să cuprindă un număr întreg de zile, ce

* Denumirea de calendar provine de la cuvîntul latin *calendae* — prima zi a lunii, care are la origine cuvîntul grecesc însemnînd „a proclama".

poate varia cel mult cu o zi, în așa fel încît succesiunea lor să reproducă succesiunea anilor tropici sau a lunilor sinodice.

Diferite popoare, în decursul veacurilor, au luat ca bază a calendarului lor *anul tropic*; acestea sînt *calendarele solare*, care au ca unitate *anul calendaristic* (cu 365 sau 366 zile). Alte popoare au la baza calendarului lor *luna sinodică*; acestea sînt *calendarele lunare*, care au ca unitate *luna*, cu un număr întreg de zile. Pentru a fi de acord și cu perioadele de vegetație, unele popoare, dispunînd de calendare lunare, le-au transformat în *calendare luni-solare*.

Dar oricare ar fi calendarul, fiecare — ca o influență reciprocă — utilizează toate unitățile: în calendarele solare există luni arbitrare, iar în cele lunare există un an lunar arbitrar. Pe lîngă aceste unități, s-a adoptat de către toate calendarele o nouă unitate, *săptămîna*, avînd 7 zile; acest număr își are originea în credința geocentristă că există 7 planete (între care și Soarele și Luna) (cap. VI).

Vom considera cîteva *moduri de soluționare a problemei calendarului*.

1°. **Calendare solare.** Cel mai vechi calendar solar este cel *egiptean*, bazat pe succesiunea revărsărilor Nilului. El are 12 luni de cîte 30 de zile urmate de cinci zile suplimentare, deci în total 365 zile. Fiind prea scurt, începutul lui se deplasează față de începutul anului tropic, astfel încît în cursul a 1508 ani parcurge toate zilele anului tropic, avansînd cu un an față de succesiunea anilor tropici.

În anul 46 î.e.n., Iulius Caesar decretează utilizarea calendarului întocmit de astronomul Sosigene (din Alexandria), calendar cunoscut sub numele de *calendar iulian* sau *stil vechi*. Durata medie a *anului iulian* este de 365,25 zile solare medii, considerînd în practică trei *ani simpli* cu cîte 365 zile și al patrulea — *an bisect* cu 366 zile. Acesta are însă un neajuns: în 384 de ani întîrzie cu 3 zile față de succesiunea anilor tropici.

În secolul XVI, decalarea calendarului iulian față de anul tropic era de 10 zile. Din acest motiv, papa Grigore al XIII-lea realizează în 1582, cu ajutorul astronomului italian Lilius, noua reformă a calendarului, cunoscut sub numele de *calendar gregorian* sau *stil nou*; acesta este adoptat astăzi în majoritatea țărilor (și în țara noastră, din anul 1924). Această reformă constă în:

— adăugarea celor 10 zile amintite, pentru eliminarea decalajului; astfel, după 4 octombrie 1582 a urmat 15 octombrie 1582; în anul 1924, decalajul a fost de 13 zile, astfel că 1 octombrie (stil vechi)—cînd s-a introdus la noi noul stil — a devenit 14 octombrie;

— suprimarea a trei zile la 400 de ani, neconsiderînd bisecți anii seculari al căror număr nu este divizibil cu 4 (1700, 1800, 1900, —, 2100 etc.) Astfel, lungimea medie a anului gregorian este de 365,2425 zile solare medii, de unde un decalaj (întîrziere) de o zi, față de anul tropic, doar la 3300 ani.

2°. **Calendare lunare.** Majoritatea popoarelor au avut la început un calendar lunar, cu *luna calendaristică* de 29 de zile și 30 de zile alternativ. Anul lor lunar avea 354 sau 355 zile, adică 12 luni sinodice. El este în uz la musulmani. Pentru a evita decalajul față de fazele Lunii, ei consideră cicluri de 30 de ani, în care 11 ani cu 355 zile, iar 19 ani cu 354 zile.

3°. **Calendare luni-solare.** S-a observat că 235 luni sinodice $\simeq$ 19 ani tropici. Pe această bază, într-un ciclu de 19 ani, se consideră 12 ani cu cîte 12 luni și 7 ani cu 13 luni. Este actualul calendar evreiesc.

4°. **Cronologie.** Se numește *eră* sau *începutul cronologiei* momentul de la care se numără anii într-un sistem oarecare.

Grecii foloseau olimpiadele, începînd cu anul 776 î.e.n.; romanii — întemeiera Romei, care corespunde anului 754 î.e.n. (numit „ab urbe condita"). După răspîndirea creștinismului, s-a introdus „era creștină", în care anii se numără de la legendara dată a „nașterii lui Christos". În prezent, fiind cea mai răspîndită, este denumită *cra noastră* (e.n.); pentru anii anteriori acestei ere se menționează *înaintea erei noastre* (î.e.n.).

Se mai poate determina timpul prin numărarea continuă a zilelor, indicînd *Data Juliană* (*DJ*). Aceasta reprezintă *Perioada Iuliană*: ea începe, în mod arbitrar, de la 12^h *TU* din 1 ianuarie 4713 î.e.n. Unitatea este ziua medie. Se utilizează în astronomie, în special în astrofizică, pentru studiul fenomenelor scurtperiodice.

*

Din punct de vedere practic, neajunsul calendarului actual constă în împărțirea nerațională a anului în luni inegale, care nu au un număr întreg de săptămîni.

Un proiect de calendar propune împărțirea anului în patru trimestre de cîte 13 săptămîni; prima lună a fiecărui trimestru ar urma să aibă 31 de zile, iar următoarele două — cîte 30 de zile. În acest mod, fiecare trimestru și fiecare an ar începe în aceeași zi a săptămînii. În anii simpli s-ar adăuga o zi suplimentară (de repaus) — între 30 decembrie și 1 ianuarie —, iar în anii bisecți — două zile suplimentare (una între 30 iunie și 1 iulie, cealaltă ca în anii simpli).

CAPITOLUL VI

MIŞCĂRILE APARENTE ALE PLANETELOR ŞI SATELIŢILOR

§ 6.1. MIŞCAREA APARENTĂ A PLANETELOR

Încă din antichitate s-a observat că unii aştri au proprietatea de a nu-şi păstra poziţii fixe faţă de stele, ci de a se deplasa printre ele, trecînd prin diferite constelaţii zodiacale. Aceşti aştri au fost numiţi *planete* (cuvînt grecesc, însemnînd „rătăcitoare"). Anticii socoteau printre planete şi *Soarele* şi *Luna* ; celelalte planete au fost numite, la greci : *Hermes, Aphrodita, Ares, Zeus* şi *Chronos*, iar la romani, în aceeaşi ordine : *Mercurius, Venus, Mars, Jupiter* şi *Saturnus* ; sînt nume de zei din mitologiile respective. (În astronomie, pentru planete au rămas pînă astăzi denumirile latineşti.)

Pînă la sfîrşitul secolului al XVIII-lea n-au fost cunoscute decît aceste planete. În anul 1781 a fost descoperită de W. Herschel o nouă planetă, care a fost numită *Uranus* ; în anul 1846 — planeta *Neptun* şi, în sfîrşit, în 1930 — ultima planetă mare cunoscută pînă astăzi — *Pluto*. În afară de aceste planete (mari), au fost descoperite începînd cu anul 1801 numeroase *mici planete*, numite şi *asteroizi*, iar din anul 1959 sînt create de om *planete artificiale*.

Studiul mişcării planetelor a început odată cu descoperirea, în antichitate, a unor *periodicităţi în mişcările lor aparente. Legităţi empirice* de acest fel au fost descoperite — după sute de ani de *observaţii sistematice* — cu 5—6 secole î.e.n. de *babilonieni*, care au cunoscut cu mare precizie nu numai durata anului şi lunii, dar şi perioadele de revoluţie ale planetelor cunoscute atunci.

Orbita Pămîntului împarte planetele în două grupe : *planete interioare* sau *inferioare* (Mercur şi Venus) şi *planete exterioare* sau *superioare* (toate celelalte, începînd cu planeta Marte). Planetele inferioare nu se îndepărtează niciodată prea mult de Soare (*elongaţii maxime*, numite *digresiuni*), din care cauză nu se pot observa decît seara sau dimineaţa, pe cînd planetele superioare se pot găsi şi în *opoziţie* cu Soarele, adică într-un punct diametral opus Soarelui (fig. 6.1).

Poziţiile reciproce caracteristice ale planetelor sînt definite matematic cu ajutorul *diferenţei* $\lambda - \odot$ dintre longitudinile geocentrice ale centrelor planetei respective şi Soarelui, diferenţă numită *elongaţie*, variind odată cu timpul. Astfel, dacă $\lambda - \odot > 0$, elongaţia este estică, adică planeta apare la est de Soare ; dacă $\lambda - \odot < 0$, elongaţia este vestică. Elongaţiile

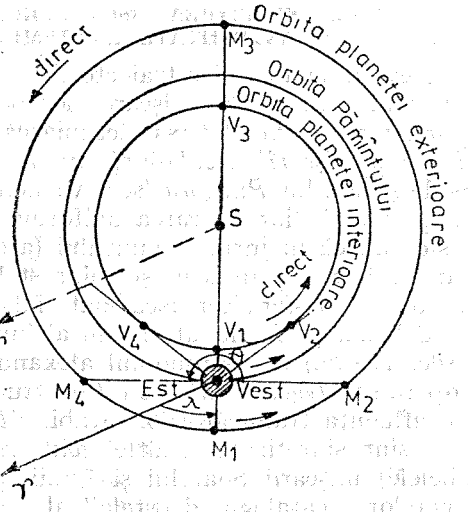


Fig. 6.1. Poziții reciproce caracteristice ale planetelor:

V_1, V_3 — conjuncție inferioară, respectiv superioară, a planetei Venus; V_2, V_4 — digresiunile planetei Venus (estică, respectiv vestică); M_1 — opoziția planetei Marte, M_3 — conjuncția planetei Marte; M_2, M_4 — cuadraturile planetei Marte.

maxime ale planetelor interioare sînt respectiv 29° pentru Mercur și 48° pentru Venus. Elongațiile planetelor exterioare pot lua toate valorile de la 0° la 360°.

În cazul cînd $\lambda - \odot = 0$, se zice că planeta este în *conjuncție* cu Soarele; cînd $|\lambda - \odot| = 180°$, se zice că planeta este în *opoziție* cu Soarele; iar dacă $|\lambda - \odot| = 90°$ sau 270°, se zice că planeta este în *cuadratură* cu Soarele. Se înțelege că o planetă interioară nu poate avea opoziții, nici cuadraturi, deoarece Pămîntul nu poate trece niciodată între ea și Soare.

Aspectul general al mișcării aparente a unei planete superioare este următorul: planeta apare de la început în crepusculul de dimineață și începe să se depărteze tot mai mult de Soare, deplasîndu-se printre stele de la vest spre est (mișcare *directă*); treptat, această mișcare se încetinește, planeta „se oprește" (punctul de *stație*) și apoi începe să se miște de la est spre vest (mișcare *retrogradă*), accelerîndu-și mișcarea. În momentul opoziției, cînd planeta culminează la miezul nopții și cînd diferența $|\lambda - \odot|$ este de 180°, viteza mișcării retrograde este maximă. După aceasta, viteza mișcării retrograde descrește, planeta „se oprește" din nou (*al doilea punct de stație*) și începe să se miște iarăși *în sens direct*, din ce în ce mai repede. După o perioadă de invizibilitate, care poate dura cîteva săptămîni, planeta reapare la răsărit în crepusculul de dimineață și *ciclul fenomenelor descrise se repetă*. La mijlocul arcului mișcării directe, cînd Soarele și planeta se află în aceeași constelație, $\lambda - \odot = 0$ și planeta se află în *conjuncție* cu Soarele.

Planetele inferioare au, de asemenea, mișcări aparente directe și retrograde, dar, spre deosebire de planetele superioare, ele „oscilează" tot timpul în preajma Soarelui, ca un pendul în jurul poziției sale mijlocii.

Orbitele aparente ale planetelor artificiale sînt asemănătoare celor ale planetelor naturale.

Hărțile reprezentînd drumurile aparente ale planetelor, pentru fiecare an, sînt publicate în anuare astronomice.

§ 6.2. EXPLICAREA MIȘCĂRILOR APARENTE ALE PLANETELOR ÎN ANTICHITATE. „SISTEMUL LUMII" DUPĂ PTOLEMEU

Nevoia de a explica traiectoriile aparente, în formă de „buclă", pe care le descriu planetele în mișcarea lor pe cer față de stele i-a îndemnat încă pe *grecii din antichitate* să alcătuiască un *„sistem al lumii"*, pornind de la *principiul mișcării circulare și uniforme* a corpurilor cerești, principiu introdus de școala lui *Pitagora* (sec. VI î.e.n.), cercul fiind considerat „curba cea mai perfectă", iar mișcarea uniformă — „mișcarea cea mai perfectă". Ei considerau că în jurul Pământului (așezat în centrul Universului) se mișcă Soarele, Luna, planetele, și chiar stelele, acestea din urmă fiind socotite „fixate" pe o sferă cerească materială*.

Cel mai perfecționat sistem al lumii pentru acea vreme a fost propus, în sec. II e.n., de astronomul alexandrin *Claudius Ptolemaios* (Ptolemeu), în opera sa *Megale Syntaxis* („Construcția cea mare") — numită mai tîrziu, sub influența traducătorilor arabi, *Almagestum* („Almagest"). (În „Almagest" sînt sintetizate dealtfel *toate realizările astronomiei grecești*: teoria (tabelele) mișcării Soarelui și Lunii, prevederea eclipselor, teoria mișcării planetelor, „catalogul de stele" al lui Hipparh, descrierea instrumentelor astronomice de care s-au folosit Hipparh și astronomii alexandrini etc.).

Sistemul lumii al lui Ptolemeu, bazat pe observațiile anterioare și în special pe cele ale lui Hipparh, se prezintă astfel:

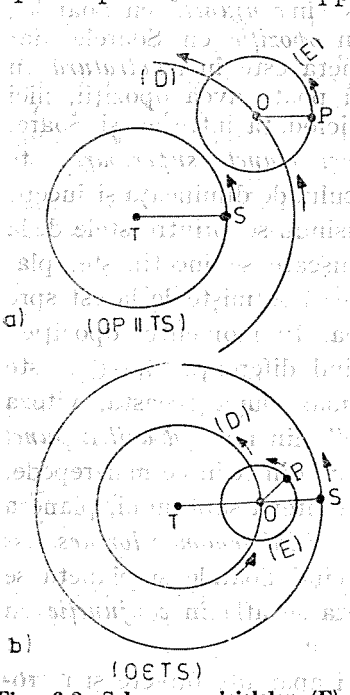


Fig. 6-2. Schema epiciclelor (E) și deferentelor (D): a) la o planetă superioară; b) la o planetă inferioară.

Fie (fig. 6.2a) T — poziția Pământului în „centrul lumii", S — poziția Soarelui pe orbita circulară descrisă de Soare în jurul Pământului în timp de un an. O *planetă superioară* P se mișcă uniform pe un cerc mic numit *epiciclu* (E), în sens direct, iar centrul epiciclului (O) se mișcă la rîndul său, tot uniform și tot în sens direct, pe un cerc cu o rază mult mai mare, numit *deferent* (D), avînd centrul în T. Poziția planetei la un moment dat se găsește la extremitatea razei epiciclului, care este paralelă cu dreapta TS. Așadar, fiecare planetă superioară (P) își parcurge epiciclul într-un an, fiind legată deci de mișcarea Soarelui în jurul Pământului, dar mișcarea centrului epiciclului (O) pe deferent are o perioadă caracteristică pentru fiecare planetă: 687 zile pentru Marte, 11,86 ani pentru Jupiter, 29,46 ani pentru Saturn.

Fie acum (fig. 6.2 b) P — poziția unei planete inferioare pe epiciclu (E), al cărui centru (O) se găsește întotdeauna pe dreapta TS și deci într-un an parcurge deferentul (D) cu centrul în T. Mișcarea pe epiciclu a planetei inferioare (P) se face cu o perioadă caracteristică pentru fiecare planetă: 88 de zile pentru Mercur și 225 de zile pentru Venus.

* *Primul succes* al școlii lui Pitagora, care avea să conducă la explicarea mișcării aparente a planetelor propriu-zise, consta în faptul că s-a arătat că *mișcarea Soarelui* (ca și *mișcarea Lunii*) se poate obține *prin compunerea a două mișcări circulare uniforme*: prima — în jurul axei ecuatorului, cu perioada de o zi, iar a doua — în jurul axei eclipticii, cu o perioadă de un an.

Perioadele de mişcare pe deferent, în cazul planetelor superioare, şi pe epiciclu, în cazul celor inferioare, sînt tocmai *revoluţiile siderale* ale acestor planete.

Combinarea mişcării pe epiciclu cu mişcarea pe deferent a permis o *explicare simplă a mişcărilor aparente ale planetelor*, printre care au fost considerate, cum am mai spus, şi Luna şi Soarele. În sistemul geocentric al lui Ptolemeu, aproape de Pămînt („centrul lumii") se dispun: întîi orbita circulară a Lunii, apoi deferentele planetelor Mercur şi Venus, apoi cercul Soarelui, urmînd deferentele planetelor Marte, Jupiter şi Saturn şi, în sfîrşit, „sfera fixelor". În acest sistem, deci, planetele sînt dispuse în ordinea scăderii vitezei mişcării lor aparente printre stele. (Întocmirea figurii o lăsăm pe seama cititorului.)

Pentru o mai bună *concordanţă cu observaţiile*, Ptolemeu mai admitea că toate planele deferentelor trecînd prin centrul Pămîntului sînt încinate unul faţă de altul sub diferite unghiuri, ca şi planele epiciclelor faţă de planele deferentelor corespunzătoare şi, de asemenea, că centrele deferentelor nu coincid cu centrul Pămîntului, ci sînt situate *excentric*. Prin descompunerea mişcării unei planete în două mişcări — mişcarea pe deferent excentric şi cea pe epiciclu —, Ptolemeu a reuşit să reprezinte ambele „inegalităţi" observate în mişcarea planetelor, şi anume: variaţia mărimii vitezei, numită „ecuaţia centrului", ca şi variaţia direcţiei mişcării, adică „staţiile" şi mişcările în formă de „buclă".

Schema lui Ptolemeu — *prima teorie matematică a mişcării planetelor* — putea fi considerată mulţumitoare din punct de vedere practic atîta timp cît precizia observaţiilor era mică şi nu se cerea prezicerea poziţiilor planetare pentru intervale mari de timp. În evul mediu, pe măsura acumulării observaţiilor, mulţi astronomi, găsind abateri din ce în ce mai mari ale *poziţiilor observate* ale planetelor faţă de cele calculate după „sistemul lui Ptolemeu", căutau perfecţionări ale acestui sistem; dar, aceste încercări au dus la o enormă complicare a schemei iniţial simple (folosind acum sisteme de epicicluri pentru fiecare planetă), fără a se obţine un acord mulţumitor cu observaţiile. Cu toate acestea, sistemul lui Ptolemeu s-a menţinut aproape 1500 de ani, ceea ce se explică nu numai prin nivelul scăzut al ştiinţelor din acea epocă, ci mai ales prin faptul că această teorie era „conformă" cu filozofia scolastică aristotelică şi cu teologia medievală creştină şi musulmană.

§ 6.3. TRECEREA LA SISTEMUL HELIOCENTRIC AL LUI COPERNIC — REVOLUŢIE ÎN CONCEPŢIA DESPRE UNIVERS

Cu toate încercările de a menţine sistemul lui Ptolemeu, a venit timpul cînd astronomia trebuia să treacă de la „corectarea" sistemului lui Ptolemeu (prin adăugarea de noi şi noi epicicluri) la *negarea* lui totală.

Acest moment s-a produs în secolul al XVI-lea, cînd marele astronom polonez *Nicolaus Copernic* (1473—1543) a creat *prima teorie de mişcare a Pămîntului şi planetelor în jurul Soarelui* — aşa-numitul *„sistem heliocentric al lumii"* —, făcînd un pas hotărîtor pentru transformarea astronomiei dintr-o ştiinţă pur geometrică într-o *ştiinţă fizică*. Sistemul heliocentric al lumii este expus în opera lui capitală, *De revolutionibus orbium coelestium* (1543). Din acest moment începe, în fond, dezvoltarea cunoştinţelor noastre despre mişcările reale ale corpurilor cereşti în spaţiu.

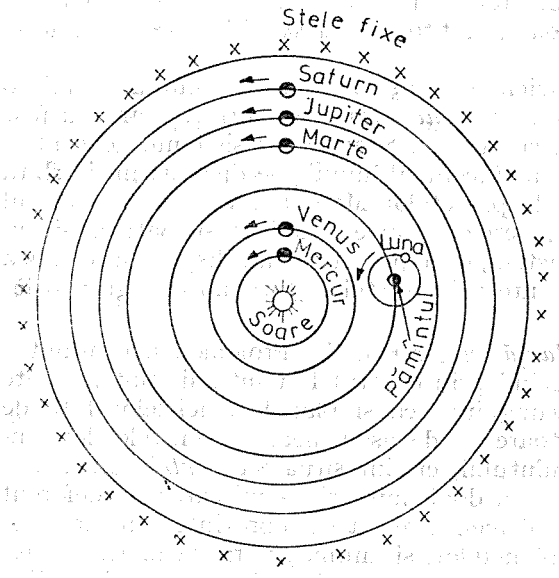


Fig. 6.3. „Sistemul lumii" după Copernic.

Copernic a fost primul care a găsit explicaţia particularităţilor mişcării planetelor, amintite mai sus, admiţînd *poziţia centrală a Soarelui* şi *atribuind Pămîntului o mişcare de revoluţie* (care explica fenomenele amintite) *şi o mişcare de rotaţie* (care explica aparenţele mişcării diurne a sferei cereşti).

Cu ajutorul *mişcării de revoluţie a Pămîntului*, Copernic a explicat perfect şi schimbarea anotimpurilor şi zonele climatice terestre (cap. II).

Copernic a reunit planetele într-un *sistem unic* (fig. 6.3). În acest sistem, Soarele ocupă locul central, Pămîntul devine o planetă aşezată între Venus şi Marte, iar Luna devine satelit al Pămîntului. Deoarece buclele traiectoriilor aparente ale planetelor reflectă de fapt revoluţia anuală a Pămîntului, mărimea unghiulară a acestor bucle reprezintă o măsură a depărtărilor planetelor.

Pe baza acestui principiu, Copernic a reuşit pentru prima oară să determine cu o foarte bună aproximaţie distanţele relative ale planetelor, luînd ca unitate distanţa de la Pămînt la Soare.

Sistemul copernican este o construcţie ştiinţifică şi aproape „modernă", chiar dacă pe atunci avea un caracter ipotetic; aceasta deoarece autorul ei nu dispunea încă de toate dovezile ale veridicităţii teoriei sale. Cu toate acestea, întreaga dezvoltare ulterioară a astronomiei şi mecanicii a adus confirmarea strălucită a doctrinei heliocentrice, singura compatibilă cu legile mecanicii.

§ 6.4. EXPLICAREA MIŞCĂRILOR APARENTE ALE PLANETELOR. ECUAŢIILE MIŞCĂRII SINODICE

Mişcările aparente, în formă de „buclă", ale planetelor au fost explicate foarte simplu de Copernic, prin mişcarea observatorului, împreună cu Pămîntul, în jurul Soarelui.

Să urmărim, de exemplu, mişcarea aparentă a planetei Marte după opoziţie ($S - T_1 - M_1$) (fig. 6.4). După un anumit interval de timp, Pămîntul va ajunge în poziţia T_2, iar planeta Marte în poziţia M_2, astfel că arcul $M_1M_2 <$ arcul T_1T_2 (deoarece perioada de revoluţie siderală a lui Marte este mai mare decît anul sideral, sau pentru că viteza liniară a Pămîntului este mai mare decît viteza planetei Marte). În acelaşi interval de timp, observatorul de pe Pămînt vede planeta, pe fondul stelelor, deplasîn-

du-se spre vest, deşi în realitate planeta Marte se mişcă pe orbita sa în acelaşi sens ca şi Pămîntul.

Să vedem acum mişcarea aparentă a planetei Marte după momentul în care planeta Marte şi Soarele se văd de pe Pămînt sub un unghi drept (poziţiile T_3 şi M_3). După un interval de timp, ele ajung în poziţiile T_4 şi M_4, astfel că arcul $M_3M_4 <$ arcul T_3T_4. Direcţia T_4M_4 s-a rotit spre est faţă de direcţia T_3M_3, adică Marte se va deplasa printre stele de la vest la est.

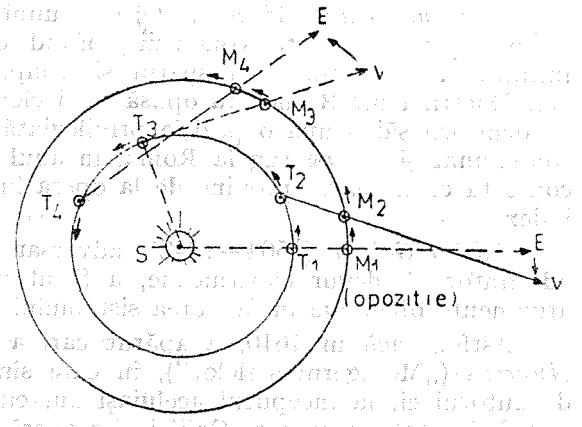


Fig. 6.4. Explicarea mişcării aparente a planetei Marte.

Aşadar, în timp ce Pămîntul a descris pe orbita sa arcul T_1T_4, planeta Marte, în mişcarea sa aparentă, s-a deplasat printre stele la început de la est la vest *(mişcare retrogradă)*, iar apoi de la vest la est *(mişcare directă)*. Undeva între punctele M_1 şi M_4 are loc momentul *staţiei* planetei, cînd ea pare că „se opreşte" ca să-şi schimbe sensul deplasării printre stele.

În mod analog se explică şi mişcarea aparentă a unei planete inferioare.

Perioada de revoluţie sinodică observată a unei planete, prin care se înţelege intervalul de timp dintre două conjuncţii de acelaşi fel sau două opoziţii, depinde nu numai de propria perioadă siderală, ci şi de cea a Pămîntului. Între aceste *trei perioade* poate fi stabilită o relaţie matematică simplă, pe baza următoarelor considerente:

Fie T — perioada siderală a planetei (în zile) S — perioada sinodică a planetei (în zile) şi $T_\oplus$ — perioada de revoluţie siderală a Pămîntului (anul sideral = 365,26 ... zile solare medii). Deplasarea unghiulară diurnă a planetei pe orbită este de $360°/T$, iar a Pămîntului de $360°/T_\oplus$. Diferenţa deplasărilor unghiulare diurne a unei planete inferioare şi a Pămîntului (sau a Pămîntului şi a unei planete superioare) este deplasarea diurnă aparentă a planetei, adică $360°/S$. De aici:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_\oplus} \quad \text{pentru o planetă inferioară;} \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T} \quad \text{pentru o planetă superioară.} \tag{6.2}$$

Relaţiile (6.1) şi (6.2) se numesc *ecuaţiile mişcării sinodice* şi servesc la calculul perioadelor siderale ale planetelor. Valorile numerice ale perioadelor sinodice şi siderale ale planetelor sînt date în tabelul din Anexa 3.

§ 6.5. LUPTA PENTRU CONCEPŢIA HELIOCENTRICĂ. PRIMELE DESCOPERIRI FĂCUTE CU LUNETA DE GALILEI

Concepţia heliocentrică a lui Copernic era într-o contradicţie flagrantă cu concepţia dominantă din evul mediu, reprezentînd primul act prin care ştiinţa se eliberează de dogmele fundamentale ale bisericii.

Giordano Bruno (1548—1600) este unul din adepții înflăcărați ai ideilor lui Copernic. El a tras concluzii profunde din sistemul copernican, privind infinitatea Universului în spațiu și timp, pluralitatea lumilor locuite etc. Doctrina lui Bruno era opusă celei clericale, potrivit căreia Pămîntul și locuitorii săi ocupă o poziție privilegiată în Univers; de aceea, el este condamnat și ars pe rug la Roma, în anul 1600. În anul 1616, inchiziția constată că „erezia" provine de la opera lui Copernic, care este pusă sub index.

Galileo Galilei (1564—1642), adversar al aristotelismului scolastic și admirator al ideilor copernicane, a făcut mari servicii științei, aducînd argumente obiective în favoarea sistemului lui Copernic.

Astfel, încă în 1610, a apărut cartea lui Galilei intitulată *Sidereus Nuncius* („Mesagerul stelelor"), în care sînt descrise descoperirile făcute de autorul ei, la începutul aceluiași an, cu ajutorul *primei lunete* care a fost îndreptată spre cer. Galilei descoperă suprafața accidentată a Lunii, avînd un aspect mai mult „pămîntesc" decît „ceresc" (cum presupunea doctrina lui Aristotel); descoperă primii patru sateliți ai lui Jupiter, apoi inelul lui Saturn; descoperă fazele lui Venus, petele solare, rotația Soarelui în jurul axei sale; descoperă natura Căii Lactee.

În 1632, același Galilei publică lucrarea *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano* („Dialog asupra celor două sisteme mari ale lumii, al lui Ptolemeu și al lui Copernic"), prezentînd sub formă de dialog superioritatea sistemului heliocentric al lui Copernic. Pentru această lucrare, în 1633, Galilei a fost tras la răspundere și silit să abjure sistemul heliocentric; cartea a fost pusă sub index în 1634.

Cea mai valoroasă lucrare a lui Galilei este *Dialoghi delle nuove scienze**, apărută în 1638, în care adună pentru prima dată elementele necesare unei *concepții dinamice* a sistemului solar (unele principii și legi stabilite experimental).

§ 6.6. PERFECȚIONAREA SISTEMULUI COPERNICAN. LEGILE MIȘCĂRII PLANETELOR — DESCOPERIREA LUI KEPLER

Din lipsa observațiilor precise, teoria lui Copernic n-a fost unanim acceptată de la început de către astronomi. Dar în a doua jumătate a secolului al XVI-lea apare un observator neegalat, danezul *Tycho Brahe* (1546—1601), care, cu ajutorul instrumentelor sale fără lunete, reușește să adune un bogat material de observații foarte precise referitor la pozițiile planetei Marte, erorile de observații fiind mai mici de 2′—3′.

Johann Kepler (1571—1630), prelucrînd minuțios bogatul material moștenit de la Tycho Brahe, a constatat că nici o combinație de mișcări circulare și uniforme nu poate reprezenta mișcarea observată a lui Marte, astfel încît abaterile pozițiilor observate față de cele calculate să fie mai mici decît erorile probabile (cunoscute) ale observațiilor utilizate. În urma acestei constatări, Kepler a trecut la încercări de a rezolva problema cu ajutorul *orbitelor necirculare* și al *mișcărilor neuniforme*.

---

* Galileo Galilei: „Dialoguri asupra științelor noi", traducere și adnotări în limba română, după textul apărut în 1938, de prof. univ. Victor Marian (Cluj), Editura Academiei București, 1961.

În anul 1609 a apărut lucrarea lui Kepler *Astronomia nova* ..., în care dă primele două legi ale mișcărilor planetare, numite de atunci legile I și a II-a ale lui Kepler:

Legea I: Planetele descriu în jurul Soarelui elipse, Soarele găsindu-se în unul din focare.

Legea a II-a: Ariile descrise de raza vectoare care unește planeta cu Soarele sînt proporționale cu timpurile în care au fost descrise.

Mai tîrziu, în 1619, găsim în opera lui Kepler *De Harmonices mundi* formularea celei de-a treia legi:

Legea a III-a: Pătratele perioadelor de revoluție ale planetelor sînt proporționale cu cuburile semiaxelor mari ale orbitelor lor.

Primele două legi ale lui Kepler arată că orbitele planetelor și vitezele lor din sistemul lui Copernic trebuie înlocuite. A treia lege a lui Kepler leagă orbitele planetare într-un sistem unic.

§ 6.7. MIȘCAREA APARENTĂ A LUNII

Deplasarea Lunii pe cer față de stelele „fixe" se distinge printr-o viteză ce depășește vitezele aparente ale Soarelui și planetelor. Aceasta se datorează faptului că Luna este satelitul Pămîntului — corp ceresc apropiat de planeta noastră. Orbita kepleriană a Lunii este puternic perturbată de atracția Soarelui (în principal) și a planetelor (într-o măsură mai mică); drept urmare, elementele orbitale (cap. VII) ale Lunii variază necontenit, unele mai rapid, altele mai lent. Aceste variații au fost puse în evidență atît din observații (unele încă din antichitate), cît și prin studii teoretice.

Astfel, cele mai mari variații medii (*perturbații* sau „inegalități" *seculare*, cap. VII) le au elementele (fig. 6.5): λ — *longitudinea geocentrică a Lunii**, avînd variația medie diurnă egală cu 13°10′35″,03; Ω — *longitudinea nodului ascendent lunar*, cu variația medie diurnă de −3′10″,63 (descriind ecliptica, mișcîndu-se spre vest, în 18 2/3 ani); și ω — *longitudinea perigeului lunar*, avînd variația medie diurnă de 6′41″,05 (făcînd un ocol complet pe orbită în 9 ani).

Perturbații periodice suferă toate elementele orbitei lunare. Astfel, *înclinarea orbitei Lunii* (i) oscilează între limitele 4°58′ și 5°20′, pentru o perioadă de aproximativ o jumătate de an. Printre *inegalitățile periodice ale longitudinii* λ, cele mai însemnate sînt: *ecuația centrului* (cunoscută încă de Hipparh), avînd partea principală egală cu $6°17' \cdot \sin(\lambda - \omega)$; *evecția* (descoperită de Ptolemeu), avînd mărimea $1°16'48'' \cdot \sin(\lambda -$

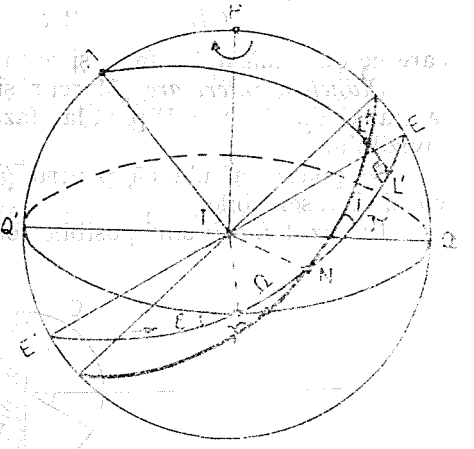


Fig. 6.5. Mișcarea aparentă a Lunii în raport cu ecliptica.

* Datorită valorii mici a înclinării orbitei Lunii pe ecliptică ($i = 5°09'$), arcele NL și NL' diferă foarte puțin, astfel încît se poate scrie $NL \simeq NL'$, ceea ce arată că distanța unghiulară dintre Soare și Lună este egală cu diferența longitudinilor lor.

$-2\lambda_\odot + \omega)$, unde $\lambda_\odot$ — longitudinea Soarelui adevărat; *variația* (descoperită abia în 1598 de Tycho Brahe), avînd mărimea $39'30'' \cdot \sin(2\lambda - \lambda_\odot)$; *ecuația anuală*, cu mărimea $-11' \cdot \sin(\lambda_\odot - \omega_\odot)$, unde $\omega_\odot$ — longitudinea perigeului Soarelui adevărat. Mișcarea Lunii față de Soare (geocentrică) se studiază cu ajutorul variației în timp a diferenței $\lambda - \lambda_\odot$; această diferență crește continuu cu timpul, valorile ei succesive determinînd *fazele Lunii* (§ 6.8).

Descoperirea legilor mișcării aparente a Lunii (ca și a Soarelui și planetelor) a avut o deosebită importanță pentru navigație și întocmirea hărților geografice, permițînd totodată preziceri satisfăcătoare ale *eclipselor* (§ 6.8).

§ 6.8. FAZELE PLANETELOR. ECLIPSE

Neavînd lumină proprie, ci reflectînd lumina Soarelui, planetele și sateliții lor prezintă fenomenul *fazelor*: la un moment dat nu vedem întregul disc al planetei, ci numai o parte din el — cea luminată de Soare.

Fie (fig. 6.6.) S — centrul Soarelui, T — centrul Pămîntului și P — centrul unei planete. Considerăm secțiunea planetei (de formă sferică) prin planul determinat de punctele S, T, P (planul figurii) și ducem, în cercul de secțiune, diametrele $AB \perp SP$ și $CD \perp TP$. Se poate spune că partea luminată de Soare a planetei este o emisferă (emisfera care se proiectează în semicercul ACB), iar partea vizibilă din T este emisfera care se proiectează după semicercul CBD. Partea în același timp luminată și vizibilă este deci fusul sferic care se proiectează pe planul figurii după sectorul $CPB = ACB \cap CBD$.

Ducînd BQ pe CD, obținem CQ, care este *lărgimea aparentă* (așa cum se vede din T) *a fusului*. Notăm cu R raza planetei, $\varphi = \sphericalangle SPT = \sphericalangle BPD$, și obținem raportul:

$$\Phi = \frac{CQ}{CD} = \frac{R + R\cos\varphi}{2R} = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi) = \cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad (6.3)$$

care ne dă o măsură a fazei și se numește simplu *faza*.

Planetele inferioare (Mercur și Venus) pot prezenta toate fazele: de la „faza plină" ($\Phi = 1$) pînă la „faza nouă" ($\Phi = 0$) în care planeta devine invizibilă.

Se poate calcula că pentru *planetele superioare* fazele devin, practic vorbind, insensibile.

În cazul *Lunii* sînt posibile toate fazele: faza $\Phi = 0$ se numește *Lună nouă*; faza $\Phi = 1$ — *Lună plină*; faza $\Phi = 1/2$ se numește *primul pătrar*, dacă se produce între Luna nouă și Luna plină, și *ultimul pătrar*, dacă se produce între Luna plină și Luna nouă; în ultimele faze se văd jumătăți diferite ale emisferei vizibile a Lunii.

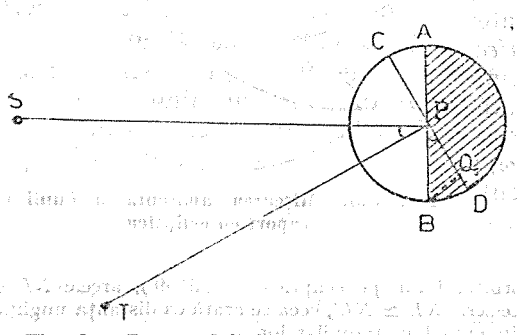


Fig. 6.6. Pentru definirea fazei unei planete.

Datorită fenomenului numit *librația Lunii* — asupra căruia nu vom insista aici — putem observa circa 59% din

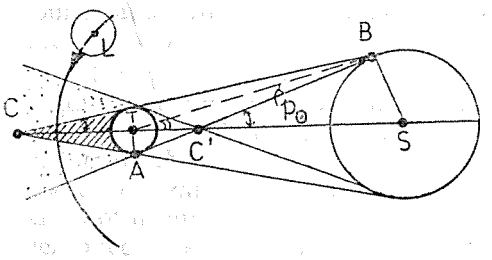


Fig. 6.7. Schema producerii eclipsei de Lună.

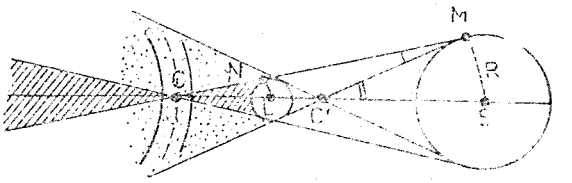


Fig. 6.8. Schema producerii eclipsei de Soare.

suprafața totală a globului lunar, deși rotația Lunii în jurul axei sale are exact aceeași durată ca și revoluția ei în jurul Pămîntului.

Se spune că un corp ceresc este *eclipsat* atunci cînd devine invizibil pentru noi, parțial sau total, deși în condițiile obișnuite ar trebui să fie văzut. Există *două moduri deosebite* în care se poate produce o *eclipsă*:

a) un astru neluminos încetează de a fi văzut, fiindcă încetează de a mai fi luminat, și

b) între astrul luminos și ochiul observatorului se interpune un obstacol care nu permite razelor pornite de pe astru să ajungă la observator.

În categoria (a) de eclipse (care nu depind de poziția observatorului pe glob) intră: eclipsele de Lună și eclipsele sateliților lui Jupiter; în categoria (b): eclipsele de Soare, trecerile planetelor inferioare (Mercur și Venus) pe discul solar, ocultațiile stelelor (sau planetelor) de către Lună (sau planete), ocultația unui satelit de către discul planetei, trecerea unui satelit pe discul planetei. Importanța cea mai mare o prezintă eclipsele de Lună și de Soare. Schemele producerii acestor eclipse sînt arătate în fig. 6.7 și 6.8.

*

Unele date astronomice și fizice relative la planete și la sateliții lor sînt prezentate în Anexele 3 și 4.

*

În țara noastră, *la Observatorul astronomic din București*, începînd din 1933, se efectuează observații pentru obținerea de *poziții fotografice* (în coordonate ecuatoriale) de planete, de mici planete, de sateliți (în special sateliții lui Jupiter), de comete, de stele duble etc. În acest scop a fost folosit *ecuatorialul Merz-Prin* cu două obiective (D = 38 cm, F = 5,7 m, unul vizual și altul fotografic), fiind adăpostit într-o cupolă de 11,60 m diametru.

CAPITOLUL VII

MECANICĂ CEREASCĂ

§ 7.1. PRINCIPIILE, PROBLEMELE ŞI METODELE FUNDAMENTALE ALE MECANICII CEREŞTI

Aducînd perfecţionări sistemului lumii al lui Copernic, legile lui Kepler sugerau faptul că Soarele împreună cu planetele formează un sistem unitar — în care toate mişcările sînt guvernate de aceleaşi legi —, de unde s-a născut ideea că trebuie să existe *o forţă unică* ce le produce. Cel care a dat primul o expresie cantitativă pentru această forţă, explicînd cu ajutorul ei o serie de fenomene cereşti şi terestre, este celebrul astronom, matematician, fizician şi filozof englez *Isaac Newton* (1643—1727) — adevăratul *fondator al mecanicii cereşti.* Printr-o intuiţie extraordinară, el a observat că mişcarea planetelor în jurul Soarelui după legile lui Kepler şi căderea liberă a corpurilor la suprafaţa Pămîntului după legile lui Galilei sînt în esenţă fenomene identice, care se supun aceleiaşi legi de *atracţie universală* (§ 7.2).

Continuînd opera lui *Galilei, Newton,* în monumentala sa operă *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* apărută prima dată în 1687, pune bazele multor ştiinţe, printre care şi ale mecanicii cereşti*. El a intuit necesitatea definirii unor *noţiuni fundamentale ale mecanicii,* ca acelea de spaţiu, timp şi masă, şi a formulat *axiomele sau legile fundamentale ale mecanicii* care îi poartă numele.

Mecanica cerească clasică se bazează pe aceste noţiuni şi principii fundamentale, se dezvoltă în cadrul acestora ca o ştiinţă teoretică şi aplicată, confruntîndu-şi mereu construcţiile teoretice cu realitatea cosmică, cu „cerul".

După cum se ştie, mecanica newtoniană admite ca realitate fizică existenţa unui *spaţiu absolut* şi a unui *timp absolut,* independente între ele şi fără nici o relaţie cu materia care umple spaţiul fizic, în următorul sens: a) există un sistem de referinţă al mişcării numit *reper inerţial* astfel ca, în cadrul geometriei euclidiene cu spaţiul tridimensional $\mathbf{R}^3$ — în care ea este valabilă —, să fie verificate principiile fundamentale ale lui Newton; b) simultaneitatea, succesiunea şi durata în timp a evenimentelor sînt independente de loc, de observator şi de momentul considerat. Oricărui eveniment mecanic, care este marcat prin prezenţa unei particule materiale într-un

* Isaac Newton: „Principiile matematice ale filozofiei naturale", traducere şi adnotări în limba română, după ediţia a III-a din 1726, de prof. univ. Victor Marian, Editura Academiei, Bucureşti, 1956.

punct al spațiului considerat, îi corespunde un element al produsului cartezian $\mathbf{R}^3 \times I$, unde I este intervalul de variație a timpului: $I = (-\infty, +\infty)$.

Prin *particulă materială*, care este o noțiune fizică, se înțelege o cantitate foarte mică (ocupînd un volum foarte mic) dintr-o substanță oarecare (de lichid, solid sau gaz). Această noțiune, mai puțin precisă, se traduce printr-o abstracție matematică, ajungîndu-se la noțiunea mecanică de *punct material*: un punct geometric (obiect) al spațiului, fără dimensiuni, dar dotat cu o masă finită. Uneori — cum se va vedea mai jos —, în modelele mecanice se asimilează cu puncte materiale și corpuri de dimensiuni care nu mai sînt neglijabile față de dimensiunile mișcării. La enunțarea principiilor lui Newton, prin „corp" va trebui să se înțeleagă punct material.

Newton enunță *legile fundamentale ale mecanicii* sub forma (Cartea I, p. 37 din traducerea citată):

„L e g e a I. Orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare uniformă în linie dreaptă, dacă nu este constrîns de forțe imprimate să-și schimbe starea".

Această lege, numită de obicei *principiul inerției*, a fost stabilită de Galilei pe cale experimentală.

„L e g e a II. Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forța".

Aici prin „mișcare" (motus) Newton înțelege de fapt nu mișcarea, ci cantitatea de mișcare $m\vec{v}$. Legea a doua se traduce prin ecuația:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}), \tag{7.1}$$

lege valabilă și în cazul mișcării unei mase variabile. Pentru o masă constantă, *ecuația lui Newton* are forma:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{7.2}$$

dînd legătura dintre forța $\vec{F}$, masa (de inerție) m și accelerația $\vec{a}$.

La baza stabilirii ecuației lui Newton a stat, desigur, și *principiul relativității al lui Galilei*, care se regăsește dealtfel ca un corolar din legea a doua, și care afirmă că dacă avem un reper inerțial există o infinitate de astfel de repere inerțiale, deducîndu-se unul din altul printr-o translație rectilinie și uniformă.

„L e g e a III. Reacțiunea este totdeauna contrară și egală cu acțiunea, sau: acțiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale și dirijate în sensuri contrarii".

Această lege constituie *principiul acțiunii și reacțiunii*, care a fost enunțat pentru prima dată de Newton.

La aceste trei axiome de bază se mai adaugă *principiul condițiilor inițiale* al lui Galilei, după care mișcarea unui corp este determinată de cunoașterea atît a poziției lui inițiale, cît și a vitezei lui inițiale, precum și cunoscutul *principiu al compunerii forțelor*, numit și *regula paralelogramului*.

Studiul mișcării unui obiect ceresc înseamnă pe de o parte stabilirea legilor generale ce caracterizează mișcarea obiectului în ansamblu (*analiza calitativă* a mișcării), iar pe de altă parte obținerea de formule care permit

determinarea poziției și vitezei obiectului la orice moment de timp din intervalul $I = (-\infty, +\infty)$, față de alte obiecte ale Universului (*analiza cantitativă* a mișcării).

Ca *probleme fundamentale ale mecanicii cerești* se consideră următoarele: a) problema mișcării de translație a unei planete sau a unui satelit în jurul corpului central (problema a două corpuri); b) problema mișcării de translație a cîtorva planete în jurul Soarelui (problema a n corpuri); c) problema mișcării de translație a sateliților unei planete oarecare; și d) problema mișcării de rotație a planetei sau a satelitului în jurul centrului propriu de inerție.

Metodele fundamentale ale mecanicii cerești actuale sînt următoarele: a) integrarea exactă (cînd aceasta este posibilă) a ecuațiilor diferențiale ale mișcării, metodă folosită în prima din problemele mai sus enumerate; b) integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării cu metoda variației constantelor de integrare arbitrare; și c) dezvoltarea integralelor ecuațiilor diferențiale ale mișcării în serii infinite de diferite forme (metode de aproximații succesive).

În capitolul de față ne vom referi numai la unele din aceste probleme și metode.

§ 7.2. LEGEA ATRACȚIEI UNIVERSALE A LUI NEWTON

1°. **Formularea legii lui Newton.** La studiul mișcării corpurilor cerești, naturale sau artificiale, se iau în considerare în primul rînd forțele de atracție mutuală dintre corpuri. *Legea atracției*, descoperită de Newton și formulată de el în „Principiile", are în forma actuală următorul enunț: *oricare două puncte materiale se atrag reciproc cu o forță direct proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.*

Să considerăm deci în spațiul euclidian obișnuit E_3 două puncte materiale S și P, avînd masele $\mathcal{M}$ și m, distanța dintre ele fiind r. Atunci, conform legii atracției a lui Newton, fiecare din aceste puncte materiale este atras către celălalt cu o forță care este dirijată după dreapta SP și a cărei mărime este dată de formula:

$$F = G\frac{\mathcal{M}m}{r^2}, \tag{7.3}$$

unde G este un coeficient de proporționalitate, numit *constanta atracției* sau *gravitației (universale)*.

Valoarea numerică a coeficientului G depinde de alegerea sistemului fundamental de unități (de lungime, masă și timp):

— în sistemul internațional (S.I.): $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \simeq \frac{1}{15} \cdot 10^{-9}$;

— în sistemul astronomic fundamental (distanța medie Pămînt-Soare, masa Soarelui, ziua solară medie): $G = 0{,}000295912$ sau, cu alte notații uzuale, $G \equiv k^2$ ($k = 0{,}01720209895$ — *constanta lui Gauss*).

2°. Verificarea Legii lui Newton cu ajutorul Lunii. Luna a jucat un rol fundamental în descoperirea și verificarea legii atracției. Newton însuși spune că în 1666 „am început să mă gîndesc că gravitația se extinde pînă la orbita Lunii ... și deci am comparat forța necesară să mențină Luna pe orbita sa cu forța gravității la suprafața Pămîntului" (Portsmouth Collection, Sect. III, Div., XI, No. 41).

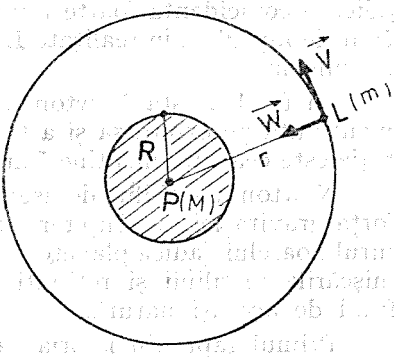


Fig. 7.1. Orbita Lunii presupusă circulară.

Iată în esență raționamentul lui Newton, în notații actuale.

Fie $g_{(P)}$ accelerația unui corp care cade liber la suprafața Pămîntului și $g_{(L)}$ accelerația Lunii în „căderea" ei spre Pămînt. Atunci, considerînd Pămîntul drept o sferă omogenă de rază R și de masă $\mathcal{M}$, iar Luna ca punct material (fig. 7.1 și § 7.3), conform legii gravitației, în forma pe care o cunoaștem din fizică, avem:

$$g_{(P)} = G\frac{\mathcal{M}}{R^2}, \quad g_{(L)} = G\frac{\mathcal{M}}{r^2}, \tag{7.4}$$

unde r — distanța de la Pămînt la Lună.

Prin urmare, cu datele numerice respective, rezultă:

$$\frac{g_{(L)}}{g_{(P)}} = \left(\frac{6370}{384\,000}\right)^2, \tag{7.5}$$

sau, punînd $g_{(P)} = 9{,}80$ m/s², avem:

$$g_{(L)} = \frac{9{,}80}{3640}\ \text{m/s}^2 = 0{,}00270\ \text{m/s}^2 \tag{7.6}$$

Se compară acum rezultatul obținut cu accelerația pe care o are Luna în mișcarea sa în jurul Pămîntului.

Admițînd, pentru simplitate, că Luna se mișcă în jurul Pămîntului pe o orbită circulară cu viteză constantă, accelerația ei, redusă în acest caz la componenta sa centripetă w (fig. 7.1), are, după cum se știe din mecanică, expresia:

$$w = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \tag{7.7}$$

unde v este viteza liniară a Lunii, iar ω — viteza ei unghiulară.

Deoarece

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{7.8}$$

unde T — perioada de revoluție siderală a Lunii în jurul Pămîntului, făcînd substituțiile numerice respective, obținem pentru accelerația căutată:

$$w = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{4\pi^2}{(27\ 1/3)^2 \cdot 86400^2} \cdot 384\,000 \cdot 10^3 = 0{,}00271\,\text{m/s}^2, \tag{7.9}$$

adică o coincidență foarte bună cu valoarea din expresia (7.6), dacă ținem cont de faptul că în realitate Luna se mișcă nu pe cerc ci pe elipsă și în mod neuniform.

În felul acesta Newton a calculat în fond forța prin care Luna este menținută pe orbita sa și a tras concluzia că forța pe care o numim gravitație este cea care menține Luna pe orbita ei.

Newton a stabilit, de asemenea, că sateliții lui Jupiter sînt atrași, prin forța gravitației, de Jupiter, cei din jurul lui Saturn — de Saturn, cei din jurul Soarelui (adică planetele) — de Soare, și sînt abătuți totdeauna de la mișcările rectilinii și reținuți pe orbite curbilinii, toate aceste fenomene fiind de aceeași natură.

Primul fapt din istoria astronomiei care avea să arate că legea lui Newton este valabilă și dincolo de limitele sistemului solar — pentru care a fost stabilită — a fost descoperirea de către W. Herschel a mișcărilor orbitale (mișcări pe orbite kepleriene în jurul centrului comun de masă) la unele stele duble (1803). Ulterior s-a dovedit că sistemele duble de stele cu mișcări orbitale constituie un fenomen foarte frecvent în Univers.

Pînă în prezent, toate sau aproape toate consecințele legii lui Newton concordă deosebit de bine cu observațiile asupra diferitelor fenomene ale naturii. Acest fapt îi conferă legii atracției caracterul de *lege universală a naturii* și oferă posibilitatea aplicării ei la studiul proprietăților diferitelor părți, mici sau mari, ale Universului înconjurător.

§ 7.3. TEOREMA LUI NEWTON PRIVIND ATRACȚIA UNEI SFERE OMOGENE GOALE

Să considerăm o sferă de rază R', avînd centrul în originea axelor de coordonate $OXYZ$ (fig. 7.2). Fie $S(X', Y', Z')$ un punct curent al sferei de ecuație

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = R'^2$$

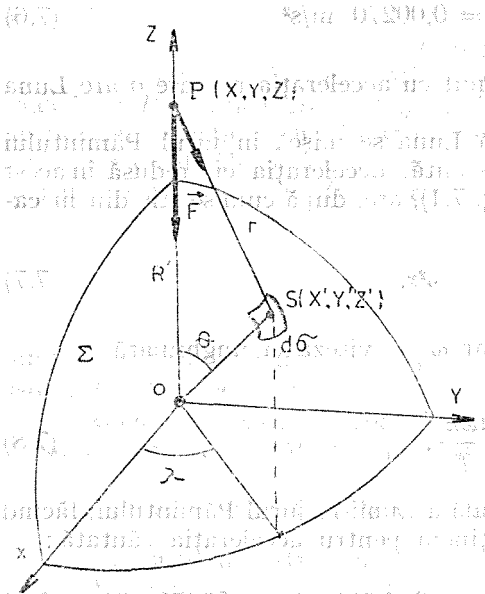


Fig. 7.2. Atracția simplului strat sferic.

și presupunem că masa atractivă este uniform distribuită pe suprafața ei (suprafață materială sferică și omogenă). Să notăm cu P punctul de masă unitate aflat pe axa OZ, punct care este atras de masa superficială a sferei cu forța newtoniană (7.3).

Potențialul forțelor newtoniene ce emană din această masă superficială se numește *potențialul simplului strat sferic.*

Să găsim acum expresia acestui potențial în punctul P. Notînd cu ρ densitatea constantă a suprafeței sferei și cu $d\sigma$ un element al

acestei suprafețe, expresia acestui potențial, după cum se știe din analiză și mecanică, este:

$$U(P) = \rho \iint_{\Sigma} \frac{d\sigma}{r}, \tag{7.10}$$

unde $\vec{r} = \overrightarrow{SP}$ și integrarea se extinde asupra întregii sfere.

Avem:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS}, \tag{7.11}$$

adică:

$$r^2 = Z^2 + R'^2 - 2R'Z\cos\theta, \tag{7.12}$$

iar elementul de arie pe suprafață $d\sigma$, în coordonatele sferice introduse (fig. 7.2), după cum se știe din geometria diferențială, este:

$$d\sigma = R'^2 \sin\theta \, d\theta \, d\lambda \tag{7.13}$$

Atunci:

$$U(P) = U(Z) = \rho \iint_{\Sigma} \frac{R'^2 \sin\theta \, d\theta \, d\lambda}{\sqrt{R'^2 + Z^2 - 2R'Z\cos\theta}} =$$

$$= \frac{\rho R'}{Z} \int_0^{2\pi} d\lambda \cdot \int_0^{\pi} \frac{R'Z \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{R'^2 + Z^2 - 2R'Z\cos\theta}} =$$

$$= \frac{2\pi\rho R'}{Z} \left[\sqrt{R'^2 + Z^2 - 2R'Z\cos\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi\rho R'}{Z}(R' + Z - |R' - Z|). \tag{7.14}$$

Notînd cu $\mathcal{M}$ masa sferei și avînd $\mathcal{M} = 4\pi\rho R'^2$, rezultă că:

$$U(Z) = \begin{cases} \mathcal{M}/Z & \text{dacă } Z \geqslant R' \\ \mathcal{M}/R' & \text{dacă } Z < R' \end{cases} \tag{7.15}$$

și forța de atracție $\vec{F} = \text{grad } U$ trece prin centrul sferei considerate.

Rezultă deci că *atracția unei sfere omogene goale este aceeași cu atracția centrului ei în care s-ar fi concentrat întreaga masă a sferei, dacă punctul material se află în exteriorul sferei, și este egală cu zero, dacă punctul material se află în interiorul sferei* (în acest ultim caz potențialul este constant).

Aceasta este *teorema lui Newton*, demonstrată pe cale geometrică în opera sa „Principiile".

Rezultatul obținut poate fi extins și asupra unei *sfere pline*, deoarece putem considera sfera plină ca fiind formată dintr-un număr foarte mare de straturi sferice concentrice omogene, foarte subțiri; în acest caz, funcțiile potențiale ale straturilor fiind aditive, potențialul sferei pline se va obține ca suma potențialelor straturilor sferice concentrice. Se spune că în acest caz densitatea sferei variază numai în funcție de distanța de la centru sau corpul sferic posedă o *repartiție sferică a densității*.

Aceste rezultate, ca și cele care au fost obținute de Newton cu privire la atracția a două sfere, constituie *baza teoretică* a aplicabilității legii atracției universale la studiul mișcării corpurilor cerești.

§ 7.4. PROBLEMA CELOR DOUĂ CORPURI

În acest paragraf vom prezenta modelul matematic al primei probleme fundamentale a mecanicii cerești: problema mișcării de translație a unei planete sau a unui satelit în jurul corpului central, purtînd denumirea de problema a două corpuri.

1°. **Formularea și importanța problemei.** Fie mișcarea unui corp ceresc P, de masă m, în cîmpul gravitațional newtonian creat de un alt corp ceresc S, de masă $\mathcal{M}$, mișcare ce se raportează în spațiul E_3 la *un sistem de referință inerțial* $Sxyz$, cu originea în centrul de masă al corpului S (notat tot cu S), axele perpendiculare două cîte două și orientate fix în spațiu (fig. 7.3). Corpul ceresc S de masă $\mathcal{M}$ se consideră sferă cu repartiție sferică a densității, care, așa cum am văzut în paragraful precedent, se comportă din punct de vedere dinamic ca un punct material: centrul sferei (S) dotat cu toată masa sferei $(\mathcal{M})$. În ceea ce privește corpul ceresc P de masă m, se presupune că dimensiunile lui sînt mici în raport cu distanțele punctelor lui la punctele corpului S. În acest caz, așa cum se arată în teoria atracției, traiectoria centrului de masă (P) al corpului P practic nu se schimbă dacă toată masa corpului (m) se concentrează în acest punct (și acest rezultat este valabil pentru orice formă și orice structură a corpului S).

Prin urmare, *problema pusă* se poate formula astfel: *să se studieze mișcarea punctului material* (P, m) *în cîmpul gravitațional creat de corpul* S *de masă* $\mathcal{M}$, *corp ce are formă sferică și structură sferică a densității*. Această formulare este echivalentă cu următorul *enunț al problemei celor două corpuri* (propriu-zis, al *„problemei a două puncte materiale"*): *să se studieze mișcarea relativă a punctului material* (P, m) *în cîmpul gravitațional creat de punctul material* $(S, \mathcal{M})$.

De obicei, corpul S se numește *corp central*, iar punctul material $(S, \mathcal{M})$ — *centru atractiv*. Punctul material (P, m), a cărui mișcare față de corpul central sau centrul atractiv se studiază, se mai numește, pentru prescurtare, și *satelit*. Firește că, în accepțiunea noastră, satelitul poate însemna: o planetă (naturală sau artificială), un asteroid, o cometă etc., dacă centrul atractiv este Soarele; un satelit (natural sau artificial) al unei planete; un companion al stelei principale dintr-o stea dublă fizică etc.

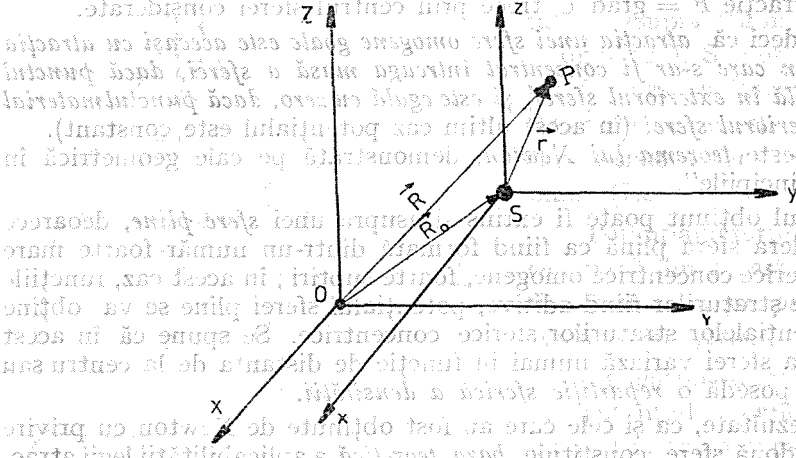


Fig. 7.3. Cele două sisteme de coordonate: *OXYZ* — sistem absolut, *Sxyz* — sistem relativ.

Importanța covîrșitoare a problemei a două corpuri constă tocmai în faptul că, pe de o parte, la studiul mișcării corpurilor cerești, acestea pot fi aproape întotdeauna înlocuite cu puncte materiale, iar pe de altă parte, sînt foarte frecvente cazurile cînd două corpuri cerești pot fi considerate izolate, total sau cel puțin în primă aproximație, de influențele gravitaționale sau negravitaționale exterioare.

În cele ce urmează vom studia legile generale, calitative și cantitative, ale mișcării punctului material (P, m) față de punctul material $(S, \mathcal{M})$, cu unele aplicații concrete la mișcarea corpurilor cerești, naturale sau artificiale.

2° **Ecuațiile diferențiale ale mișcării absolute și relative.** Vom considera deci cele două puncte materiale — centrul atractiv și satelitul — care se atrag reciproc conform legii atracției universale. Alegem în E_3 *încă un sistem de coordonate*: sistemul absolut (fix, inerțial) $OXYZ$, în care axele OX, OY, OZ sînt paralele cu axele corespunzătoare Sx, Sy și Sz și orientate la fel ca și acestea din urmă (fig. 7.3).

Asupra punctului (P, m) acționează forța $\vec{F} = -G\frac{\mathcal{M}m}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{\mathcal{M}m}{r^3}\vec{r}$; de aceea, *ecuația mișcării absolute* a acestui punct, adică a mișcării față de sistemul $OXYZ$, conform legii a doua a dinamicii (§ 7.1) este:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{\mathcal{M}m}{r^3}\vec{r},$$

unde $\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}\left(\equiv \ddot{\vec{R}}\right)$ este vectorul accelerație al punctului, sau

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{\mathcal{M}}{r^3}\vec{r} \tag{7.17}$$

Punctul $(S, \mathcal{M})$ se deplasează față de sistemul $OXYZ$ datorită forței $\vec{F}_1 = G\frac{\mathcal{M}m}{r^3}\vec{r}$; de aceea, *ecuația mișcării absolute* a acestui punct este:

$$\mathcal{M}\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_0}{\mathrm{d}t^2} = G\frac{\mathcal{M}m}{r^3}\vec{r},$$

adică

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_0}{\mathrm{d}t^2} = G\frac{m}{r^3}\vec{r} \tag{7.18}$$

Dar conform fig. 7.3, $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}$ și datorită translației paralele (fără rotație!) a axelor sistemului $Sxyz$ de sistemul $OXYZ$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_0}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2};$$

de aici, pe baza formulelor (7.17) și (7.18), obținem:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{\mathcal{M}+m}{r^3}\vec{r} \tag{7.19}$$

Constanta $G(\mathcal{M}+m)$, notată pentru prescurtare astfel:

$$\mu = G(\mathcal{M}+m), \tag{7.20}$$

se numește *parametrul gravitațional* al cuplului de puncte materiale $(S, \mathcal{M})$ și (P, m).

Așadar studiul mișcării relative a punctului material (P, m) față de punctul material $(S, \mathcal{M})$ revine la rezolvarea următoarei *ecuații a mișcării relative*:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \mu\frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \tag{7.21}$$

Această ecuație vectorială este echivalentă cu următoarele *trei ecuații scalare* pentru coordonatele carteziene ale satelitului, în sistemul $Sxyz$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{z}{r^3} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

unde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Observăm că ecuațiile (7.22) pot fi puse și sub forma:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

unde

$$U = \frac{\mu}{r}. \tag{7.24}$$

Aceste ecuații reprezintă, după cum se știe din mecanică, mișcarea punctului material (de masă unitate) sub acțiunea forței centrale ce derivă din *funcția de forță* (7.24). De aceea, *teoremele generale ale mecanicii* vor furniza imediat patru integrale prime ale acestor ecuații (integralele ariilor și integrala energiei) și apoi se vor deduce ecuația orbitei și legile de mișcare pe această orbită.

Dacă adunăm membru cu membru *ecuațiile mișcării absolute* (7.18) și (7.17) și integrăm succesiv ecuația obținută, găsim:

$$\mathcal{M}\frac{d\vec{R}_0}{dt} + m\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{a} \tag{7.25}$$

și

$$\mathcal{M}\vec{R}_0 + m\vec{R} = \vec{a}t + \vec{b}, \tag{7.26}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ fiind *constante de integrare* independente de timp (t).

Observăm că membrul întîi al ecuației (7.26) este legat de centrul de masă al sistemului de puncte materiale prin formula $\vec{\rho} = (\mathcal{M}\vec{R}_0 + m\vec{R})/(\mathcal{M} + m)$, $\vec{\rho}$ fiind vectorul de poziție al centrului de masă.

Relațiile (7.25) și (7.26) reprezintă, în proiecții pe axele de coordonate, 6 integrale prime ale mișcării centrului de masă al sistemului format din cele două puncte materiale considerate; ele sînt traducerea în formă matematică a *teoremei centrului de greutate*: centrul de greutate al punctelor materiale $(S, \mathcal{M})$ și (P, m) are o mișcare rectilinie și uniformă sau este fix.

În cazul cînd ecuația (7.21) este rezolvată, adică este găsită funcția $\vec{r} = \vec{r}(t)$, din sistemul de ecuații $\vec{R} - \vec{R}_0 = \vec{r}$ și (7.26) se determină $\vec{R}_0$ și $\vec{R}$ în funcție de timp, adică mișcarea absolută a punctelor materiale considerate.

În cele ce urmează vom prezenta integralele prime ale ecuației (7.21) împreună cu interpretarea lor mecanică.

3° **Integrala ariilor. Legea a doua (generalizată) a lui Kepler.** Se înțelege că raza vectoare $\vec{r}$ și vectorul viteză $\vec{V}$ ale satelitului (P, m) față de centrul atractiv $(S, \mathcal{M})$ sînt funcții de timp. Fie *în momentul inițial* t_0: $\vec{r} = \vec{r}_0$, $\vec{V} = \vec{V}_0$.

Vom considera aici *cazul cînd vectorii* $\vec{r}_0$ *și* $\vec{V}_0$ *sînt necoliniari*: $\vec{r}_0 \times \vec{V}_0 \neq \vec{0}$. Plecăm de la ecuația (7.21), pe care o înmulțim vectorial (la stînga) cu $\vec{r}$; obținem:

$$\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{1}{r^3}(\vec{r} \times \vec{r})$$

Deoarece $\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$, rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{0},$$

de unde

$$\vec{r} \times \vec{V} = \vec{c}, \tag{7.27}$$

unde $\vec{c}$ — *constantă de integrare*, care se determină din condițiile inițiale date.

Relația (7.27) dintre raza vectoare și viteză se numește *integrala momentului cinetic* sau *integrala (vectorială) a ariilor*, exprimînd *legea de conservare*

a momentului cinetic sau *a ariilor* în mişcarea punctului material (de masă unitate). Vectorul $\vec{c}$ se numeşte *constanta* (vectorială a) *ariilor*, pentru faptul că din definiţia *vitezei areolare* din mecanică:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{V}), \tag{7.28}$$

rezultă, pe baza integralei prime (7.27), relaţia:

$$2\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{c}, \tag{7.29}$$

care reprezintă forma matematică a *legii a doua (generalizată) a lui Kepler*.

Înmulţind scalar cu $\vec{r}$ relaţia (7.27), obţinem:

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = 0, \tag{7.30}$$

adică: la orice moment t, vectorul $\vec{r}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{c}$, ceea ce înseamnă că *în tot timpul mişcării raza vectoare $\vec{r}$ este situată într-un plan care trece prin centrul atractiv şi este perpendicular pe vectorul $\vec{c}$*. Ecuaţia (7.28) este *ecuaţia (vectorială a) planului mişcării*.

Pentru *reprezentarea analitică* a formulelor (7.27) şi (7.30), ne îndreptăm atenţia asupra sistemului de coordonate $Sxyz$, cu originea în S şi axele orientate constant în spaţiu, versorii axelor fiind respectiv $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Fie c_x, c_y, c_z — proiecţiile (componentele) vectorului $\vec{c}$ pe aceste axe. Atunci formula (7.27) se scrie sub forma:

$$\vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

şi *integralele ariilor în coordonate sînt*:

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_x, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_y, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_z, \end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

unde c_x, c_y, c_z se numesc *constantele (scalare ale) ariilor*.

Ecuaţia planului orbitei (7.30) se scrie acum sub forma:

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0 \tag{7.32}$$

şi mişcarea punctului material (P, m) va fi situată în continuare în acest plan (fig. 7.4).

4° **Integrala energiei. Legea de conservare a energiei mecanice.** Considerăm din nou ecuaţia (vectorială a) mişcării punctului material (P, m) (7.21) şi o înmulţim scalar cu $2\dot{\vec{r}}$; în acest caz obţinem:

$$2\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = -\frac{2\mu}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}},$$

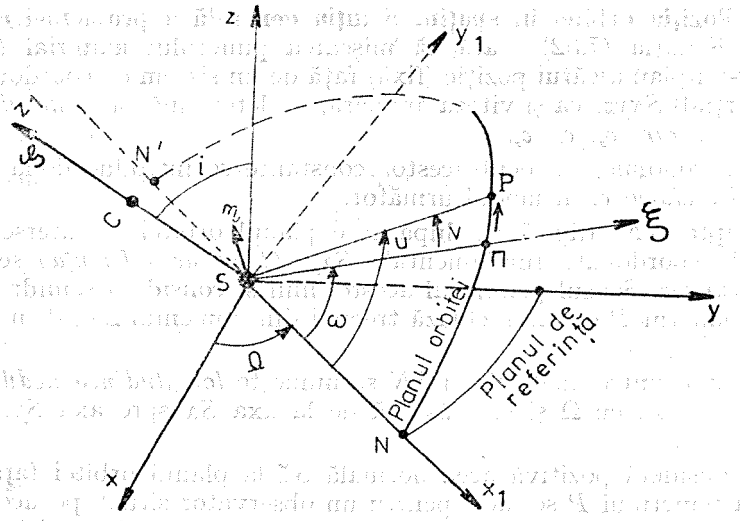


Fig. 7.4. Poziția planului orbitei față de planul de referință.

sau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\vec{r}}^2) = -\frac{\mu}{r^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}^2)$$

Deoarece $\dot{\vec{r}} = \vec{V}$, $\dot{\vec{r}}^2 = \vec{V}^2 = V^2$ și $\vec{r}^2 = r^2$, rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V^2) = -\frac{\mu}{r^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2),$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\mu}{r}\right);$$

de unde:

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \tag{7.33}$$

Această integrală primă poartă denumirea de *integrala energiei* (sau „integrala forțelor vii"), iar h — *constanta energiei*; aceasta din urmă se determină din condițiile inițiale date.

În vederea justificării acestor denumiri, formula (7.32) se transcrie sub forma:

$$\frac{V^2}{2} + \left(-\frac{\mu}{r}\right) = \frac{h}{2} = \overline{h} \tag{7.34}$$

Primul termen reprezintă energia cinetică a punctului material (de masă unitate), iar al doilea — energia lui potențială. Formula (7.34) arată că *energia mecanică a satelitului este constantă în tot timpul mișcării sale (legea de conservare a energiei).*

5°. **Poziția orbitei în spațiu. Soluția generală a problemei celor două corpuri.** Ecuația (7.32) arată că mișcarea punctului material (P, m) se face într-un plan a cărui poziție (fixă) față de un sistem de coordonate oarecare (inerțial) $Sxyz$, ca și viteza areolară, se determină *cu ajutorul constantelor de integrare* c_x, c_y, c_z.

În astronomie, în locul acestor constante se introduc două *unghiuri*, Ω *și* i, *și scalarul* c, în modul următor.

Dreapta NN' (fig. 7.4), după care planul orbitei se intersectează cu planul de coordonate fundamentale Sxy *(plan de referință)* se numește *linia nodurilor*. Sensul pozitiv al acestei linii se consideră semidreapta SN, pe care punctul P o intersectează trecînd din domeniul $z < 0$ în domeniul $z > 0$.

Unghiul dintre axele Sx și SN se numește *longitudinea nodului ascendent*, se notează cu Ω și se măsoară de la axa Sx spre axa Sy, de la 0° la 360°.

Se consideră pozitivă acea normală $S\zeta$ la planul orbitei față de care mișcarea punctului P se face, pentru un observator situat pe această axă, de la dreapta spre stînga, adică în sensul trigonometric pozitiv. Unghiul dintre $S\zeta$ și Sz este, evident, egal cu unghiul dintre planul orbitei și planul de referință ales. Acest unghi se numește *înclinarea orbitei*, se notează cu i și poate avea toate valorile de la 0° pînă la 180°. Dacă $0° < i < 90°$, se spune că mișcarea este *directă*, iar dacă $90° < i < 180°$, — mișcarea este *retrogradă*.

Deoarece mișcarea este plană, este oportun să se treacă de la sistemul de coordonate $Sxyz$ la sistemul de coordonate $Sx_1y_1z_1$, al cărui plan fundamental este chiar planul orbitei (fig. 7.4); în acest din urmă plan, mișcarea punctului P se face în sensul $Sx_1 \to Sy_1$, axa Sz_1 fiind orientată după direcția pozitivă a normalei $S\zeta$ la planul orbitei $(Sz_1 \equiv S\zeta)$.

Transformarea de coordonate o vom efectua în *două etape*:

Mai întîi se va trece de la sistemul $Sxyz$ la sistemul intermediar Sx_1y^0z, obținut din primul prin rotirea în jurul axei Sz cu unghiul Ω. Formulele acestei transformări sînt (în formă matricială):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y^0 \\ z \end{pmatrix} \tag{7.35}$$

În etapa a doua se trece de la sistemul intermediar Sx_1y^0z la sistemul $Sx_1y_1z_1$, prin rotirea în jurul axei Sx_1 cu unghiul i; formulele de transformare sînt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y^0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Înlocuind această expresie în membrul doi al relației precedente, după efectuarea înmulțirii matricilor, obținem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\cos i \sin\Omega & \sin i \sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i \cos\Omega & -\sin i \cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \tag{7.36}$$

Aceasta este *relația matricială de transformare a sistemului de coordonate* $Sxyz$ *în sistemul* $Sx_1y_1z_1$, relație utilă pentru obținerea funcțiilor ce definesc mișcarea punctului material (P,m) în planul orbitei în raport cu timpul.

(1) Vom obține mai întîi *relațiile dintre* c_x, c_y, c_z *și* c, Ω, i.

Pe normala $S\zeta$ se consideră segmentul $|SC|$ avînd lungimea $c = |\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$ (fig. 7.4). Coordonatele punctului C sînt: în sistemul $Sxyz$: c_x, c_y, c_z, iar în sistemul $Sx_1y_1z_1$: 0, 0, c. De aceea, conform relației (7.36), avem:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\cos i \sin\Omega & \sin i \sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i \cos\Omega & -\sin i \cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Atunci *integralele ariilor*, cu noile constante de integrare c, Ω și i, se obțin sub forma:

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c \sin i \sin\Omega, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= -c \sin i \cos\Omega, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c \cos i, \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

relații care servesc la determinarea constantelor c, i, Ω, cunoscînd poziția și viteza inițială a punctului P în spațiu.

În sistemul de coordonate $Sx_1y_1z_1$, în care, pentru orice poziție a punctului P, $z_1 = \dot{z}_1 = 0$ (planul orbitei), aceste integrale se reduc la una singură:

$$x_1\dot{y} - y_1\dot{x}_1 = c \tag{7.38}$$

care, după introducerea *coordonatelor polare* $r = SP$, $u = (\vec{r}, \overrightarrow{Sx_1})$ (fig. 7.4), după formulele:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r \cos u, \\ y_1 &= r \sin u, \\ z_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.39}$$

se transformă astfel:

$$r^2 \frac{du}{dt} = c. \tag{7.40}$$

(2) *Expresiile coordonatelor* rectangulare ale punctului (P,m) *în sistemul* $Sxyz$, în baza relației de transformare (7.36) și a formulelor (7.39), vor fi:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

în care unghiul polar u se numește *argumentul de latitudine.*

Expresiile componentelor vitezei relative $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ în sistemul $Sxyz$ se obţin prin derivarea în raport cu timpul a relaţiilor (7.41):

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\frac{x}{r} + ur(-\sin u \cos\Omega - \cos u \sin\Omega \cos i), \\ \dot{y} &= \dot{r}\frac{y}{r} + ur(-\sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \cos i), \\ \dot{z} &= \dot{r}\frac{z}{r} + ur \cos u \sin i. \end{aligned}\right\} \tag{7.42}$$

Coordonatele şi componentele vitezei determinate cu ajutorul formulelor (7.41), respectiv (7.42), sînt *coordonate şi viteze parametrice ale mişcării*, relaţiile respective reprezentînd *soluţia generală, în formă parametrică, a problemei celor două corpuri*.

În felul acesta, studiul cantitativ al mişcării punctului (P,m) revine la găsirea mărimilor r şi u şi a derivatelor lor $\dot{r}$ şi $\dot{u}$, în funcţie de timp, precum şi la identificarea celor 6 constante de integrare şi determinarea lor din condiţiile iniţiale date.

(3) *O altă metodă de rezolvare* a problemei determinării coordonatelor x, y, z şi a componentelor vitezei relative $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, constă în *folosirea sistemului de coordonate orbitale carteziene* $S\xi\eta\zeta$ (fig. 7.4), în care: axa $S\xi$ trece prin periastru $(\prod)$, axa $S\eta$ este perpendiculară pe $S\xi$ în planul orbitei (în sensul trigonometric), iar axa $S\zeta$ este normala pozitivă a planului orbital.

Sistemul $S\xi\eta\zeta$ se obţine din sistemul $Sx_1y_1z_1$ prin rotirea în jurul axei Sz_1 $(\equiv S\zeta)$, cu unghiul ω, numit *longitudinea periastrului*. Avem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Introducînd această expresie în formula matricială de transformare (7.36), după înmulţirea matricelor respective, se obţine formula matriceală de transformare a sistemului de coordonate $Sxyz$ în sistemul $S\xi\eta\zeta$.

Lăsînd pe seama cititorului efectuarea acestei transformări, observăm că coordonatele orbitale carteziene şi derivatele lor au o importanţă deosebită în astronomie, deoarece, aşa cum se arată la punctul 7° şi în Anexa 5, acestea sînt funcţii de timp mai simple decît coordonatele polare corespunzătoare.

6°. Traiectoria mişcării. Legea întîi (generalizată) a lui Kepler.

(1) Vom stabili mai întîi dependenţa funcţională $r = r(u)$, adică vom deduce *ecuaţia orbitei în coordonate polare*.

Ne vom folosi de integrala ariilor şi de integrala energiei, exprimate în coordonate polare:

$$\left.\begin{aligned} r^2\frac{du}{dt} &= c, \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 &= \frac{2\mu}{r} + h. \end{aligned}\right\} \tag{7.43}$$

Avînd:

$$\frac{du}{dt} = \frac{c}{r^2} \text{ şi } \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{du},$$

a doua ecuaţie (7.43) se transformă astfel:

$$\frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = h + \frac{2\mu}{r} - \frac{c^2}{r^2} \tag{7.44}$$

Această ecuaţie reprezintă *ecuaţia diferenţială a traiectoriei în coordonate polare*, a cărei integrare ne conduce la ecuaţia traiectoriei.

Deoarece $\frac{d}{du}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{du}$, ecuaţia diferenţială se transformă astfel:

$$c^2\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{du}\right]^2 = h + \frac{2\mu}{r} - \frac{c^2}{r^2},$$

care, după separarea variabilelor şi transformarea expresiei de sub radical în pătrat perfect, devine:

$$du = \frac{d\left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)}{\pm\sqrt{h + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)^2}}$$

Prin integrare, considerînd semnul „—" din faţa radicalului, se obţine:

$$u - \omega = \arccos\frac{\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}}{\sqrt{h + \frac{\mu^2}{c^2}}}, \tag{7.45}$$

unde ω este *constanta de integrare*.

Prin inversare, obţinem *valoarea razei vectoare r în funcţie de u*:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{hc^2}{\mu^2}}\cos(u - \omega)} \tag{7.46}$$

Comparînd această ecuaţie cu ecuaţia standard a unei conice în coordonate polare, polul fiind situat în unul din focare:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{7.47}$$

conchidem că ecuația (7.46) reprezintă ecuația unei conice, ale cărei parametru, excentricitate și unghi polar, prin identificare, sînt

$$p = \frac{c^2}{\mu} \tag{7.48}$$

$$e = \sqrt{1 + h\frac{c^2}{\mu^2}} \tag{7.49}$$

$$v = u - \omega, \tag{7.50}$$

unde v se numește *anomalia adevărată* (a se vedea Anexa 5).

Am obținut deci următorul rezultat: *dacă punctele materiale* (P, m) *și* $(S, \mathcal{M})$ *se atrag conform legii atracției universale, primul (satelitul), în mișcarea sa față de al doilea (centrul atractiv), descrie o conică, avînd unul din focare în centrul atractiv.* Aceasta este *legea I (generalizată) a lui Kepler.*

Forma conicei este determinată de semnul constantei energiei h, pe baza formulei (7.49), astfel:

$$\begin{aligned} &h < 0 \Leftrightarrow e < 1: \text{ elipsă},\\ &h = 0 \Leftrightarrow e = 1: \text{ parabolă},\\ &h > 0 \Leftrightarrow e > 1: \text{ hiperbolă}. \end{aligned} \tag{7.51}$$

(2) *Formulele pentru derivatele* $\dot{r}$ *și* $\dot{u}$ *(sau* $\dot{v}$*)* se obțin astfel. Din relațiile (7.40) și (7.50) avem:

$$\dot{u} = \dot{v} = \frac{c}{r^2} \tag{7.52}$$

iar pentru a avea pe $\dot{r}$ derivăm (7.47) în raport cu timpul și ținem cont de (7.52) și (7.47):

$$\dot{r} = \frac{pe \sin v \cdot \dot{v}}{(1 + e\cos v)^2} = \frac{ce}{p}\sin v \tag{7.53}$$

Pentru desăvîrșirea studiului mișcării în cadrul problemei celor două corpuri, *se consideră separat fiecare tip de orbită*, potrivit cu clasificarea (7.51). În acest paragraf ne ocupăm numai cu cazul mișcării pe elipsă, cazurile mișcării pe parabolă, hiperbolă și în linie dreaptă ($c = 0$) fiind lăsate drept exerciții de seminar.

7°. **Mișcarea pe elipsă. Ecuația și legea a III-a (generalizată) a lui Kepler.** În cazul mișcării eliptice, așa cum am văzut: $0 < e < 1$, $a > 0$ și $p = a(1 - e^2)$. Constantele de integrare c și h, pe baza formulelor (7.48) și (7.49), se exprimă astfel:

$$c = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \tag{7.54}$$

$$h = -\frac{\mu^2}{c^2}(1 - e^2) = -\frac{\mu}{a} \tag{7.55}$$

(1) Ne propunem *să exprimăm raza vectoare* r *în funcție de timp.* Pentru aceasta vom proceda astfel. Eliminînd $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ între ecuațiile (7.43), în

care se pune $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}$, și înlocuind constantele h și c pe baza formulelor (7.54) și (7.55), obținem:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = h + \frac{2\mu}{r} - \frac{c^2}{r^2} = \mu\left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} - \frac{a(1-e^2)}{r^2}\right] =$$

$$= \frac{\mu}{ar^2}\left[a^2e^2 - (a-r)^2\right] \tag{7.56}$$

Aceasta este ecuația diferențială a funcției $r(t)$; de aici, prin separarea variabilelor și extragerea rădăcinii pătrate, obținem:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = \frac{r\,dr}{+\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}} \tag{7.56'}$$

(considerînd semnul „+" pentru rădăcina pătrată, ceea ce corespunde cazului $\frac{dr}{dt} > 0$, adică după trecerea la pericentru $r(t)$ crește cu timpul).

Pentru integrarea ecuației (7.56'), facem următoarea schimbare de variabilă:

$$a - r = ae\cos E, \qquad r = a(1 - e\cos E), \tag{7.57}$$

de unde:

$$dr = ae\sin E\,dE \tag{7.58}$$

Obținem:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = a\,(1 - e\cos E)dE \tag{7.59}$$

După integrare, ajungem la *ecuația lui Kepler* pentru mișcarea eliptică:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}(t-\tau) = a(E - e\sin E),$$

sau

$$E - e\sin E = \sqrt{\mu}\,a^{-3/2}(t-\tau), \tag{7.60}$$

unde τ — constantă de integrare, numită *momentul trecerii prin periastru*.

Mărimea

$$n = \sqrt{\mu}\,a^{-3/2} = \frac{2\pi}{T} \tag{7.61}$$

(unde $\mu = G(\mathcal{M} + m)$; T — perioada de revoluție siderală) se numește *viteza unghiulară medie* sau *mișcarea medie*, iar mărimea

$$M = n(t-\tau) \tag{7.62}$$

se numește *anomalie medie*.

Cu notaţiile introduse, ecuaţia lui Kepler se scrie:

$$E - e \sin E = M. \tag{7.63}$$

Observăm că această ecuaţie am dedus-o şi pe cale geometrică, aşa cum a descoperit-o Kepler (Anexa 5), ceea ce justifică denumirea de *anomalie excentrică* a unghiului auxiliar introdus, E.

Pentru *determinarea anomaliei medii M la un moment t*, nu este necesară cunoaşterea mărimii τ, ci este suficient să cunoaştem, pentru un moment oarecare dat, t_0, valoarea M_0. Într-adevăr, pe baza relaţiei (7.62), avem:

$$M = M_0 + n(t - t_0). \tag{7.64}$$

Momentul t_0 în astronomie se numeşte *epocă*, iar M_0 — *anomalie medie la epocă*.

Aşadar, coordonatele carteziene ale punctului material (P, m), ca şi componentele vitezei lui relative, sînt exprimate în *funcţie de timp şi de 6 constante de integrare*:

$$a,\ e,\ M_0,\ \Omega,\ i,\ \omega, \tag{7.65}$$

numite în astronomie *elementele orbitale ale mişcării eliptice*.

(2) În sfîrşit, vom obţine *legea a treia (generalizată) a lui Kepler*. Din relaţia obţinută pentru mişcarea medie (7.61), rezultă:

$$\frac{T^2(\mathcal{M} + m)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} \tag{7.66}$$

Considerînd mai mulţi sateliţi (P_i, m_i), i = 1, 2, ..., în jurul centrului atractiv $(S, \mathcal{M})$, obţinem, pe baza analogiei cu relaţia (7.66):

$$\frac{T_1^2(\mathcal{M} + m_1)}{a_1^3} = \frac{T_2^2(\mathcal{M} + m_2)}{a_2^3} = \ldots = \frac{4\pi^2}{G}, \tag{7.67}$$

adică *legea a III-a (generalizată sau corectată) a lui Kepler*.

Această lege este folosită pentru determinarea maselor corpurilor cereşti care dispun de sateliţi.

8. **Noţiuni despre calculul de efemeride pentru planete, comete şi sateliţi.** După cum am văzut, metoda de calcul al coordonatelor x, y, z pentru un moment t, într-un sistem de coordonate (inerţial) oarecare $Sxyz$, pe baza unor elemente orbitale date pentru epoca t_0, constă în *două etape*:

(1) *Întîi* se calculează coordonatele orbitale: polare (r, v) sau rectangulare (ξ, η), ceea ce se face în mod *diferit*, în funcţie de tipul orbitei.

(2) *În etapa a doua* se calculează coordonatele carteziene x, y, z după formulele (7.41) sau formulele echivalente (nescrise) ce conţin coordonatele orbitale rectangulare.

În aceste formule, *elementele orbitale i, Ω, ω pot fi raportate faţă de diverse sisteme de coordonate* şi în funcţie de aceasta vom avea diferite valori pentru coordonatele x, y, z. Dacă aceste elemente orbitale se raportează faţă de *sistemul de coordonate ecliptice $Sxyz$*, în care *planul fundamental este planul eclipticii* pentru un moment bine definit (epocă), axa Sx fiind orientată spre punctul vernal pentru acelaşi moment, aceste elemente se numesc *elemente ecliptice*; pentru aceste elemente păstrăm notaţiile i, Ω, ω (fig. 7.5). Dacă *aceleaşi* elemente orbitale se raportează faţă de

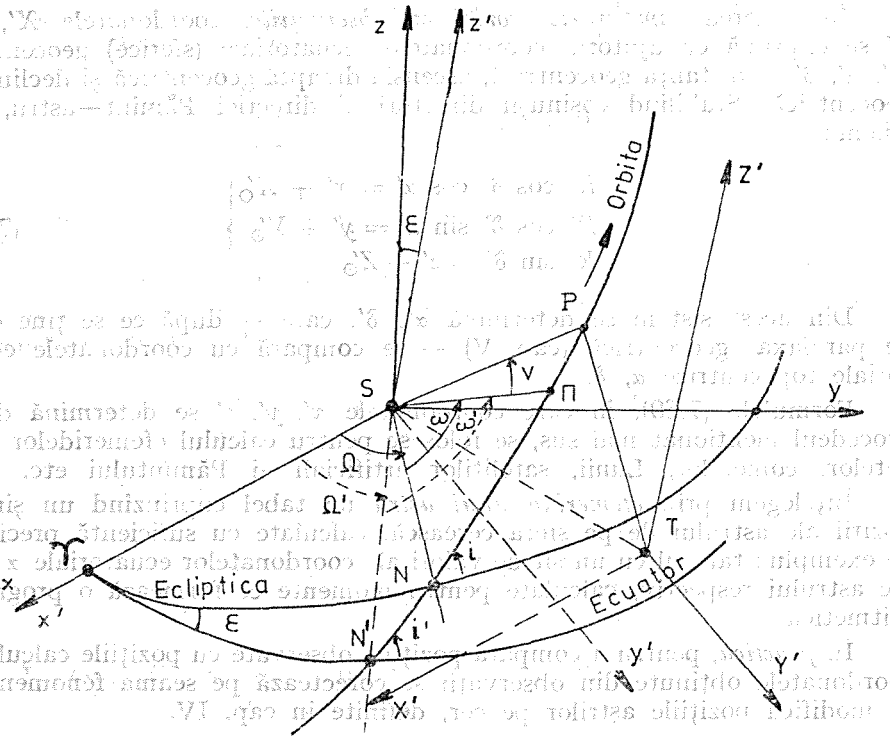


Fig. 7.5. Orbita în sistemul de coordonate ecliptice şi ecuatoriale.

sistemul de coordonate ecuatoriale $Sx'y'z'$ (fig. 7.5), în care *planul fundamental este planul ecuatorului ceresc,* iar axa Sx' este orientată spre punctul vernal, aceste elemente se numesc *elemente ecuatoriale* şi se notează cu i', Ω', şi ω'.

Trecerea de la elementele ecliptice i, Ω, ω la elementele ecuatoriale i', Ω', ω' se face prin rezolvarea triunghiului sferic $\Upsilon NN'$ (fig. 7.5).

Cunoscînd coordonatele heliocentrice rectangulare ecuatoriale ale astrului, x', y', z', care se obţin din coordonatele x, y, z prin rotirea sistemului ecliptic în jurul axei absciselor cu unghiul ε, după formulele translaţiei originii (fig. 7.5), găsim uşor *coordonatele ecuatoriale geocentrice ale astrului*:

$$\begin{aligned} X' &= X'_\odot + x', \\ Y' &= Y'_\odot + y', \\ Z' &= Z'_\odot + z', \end{aligned} \tag{7.68}$$

unde $X'_\odot$, $Y'_\odot$, $Z'_\odot$ sînt coordonatele geocentrice rectangulare ecuatoriale ale Soarelui. Menţionăm că mărimile $-X_\odot$, $-Y_\odot$, $-Z_\odot$ sînt coordonatele rectangulare ale Pămîntului faţă de Soare şi sînt cunoscute din mişcarea Pămîntului în jurul Soarelui. Valorile numerice ale acestor coordonate se publică anual, pentru fiecare zi, în marile anuare astronomice („Astronomiceskii Ejegodnik", „American Ephemeris", „Connaissance des Temps", „Berliner Jahrbuch" etc.).

În vederea *comparării teoriei cu observațiile*, coordonatele X', Y', Z' se exprimă cu ajutorul coordonatelor ecuatoriale (sferice) geocentrice R', α', δ' — distanța geocentrică, ascensia dreaptă geocentrică și declinația geocentrică. Stabilind cosinușii directori ai direcției Pământ—astru, obținem:

$$\left.\begin{aligned} R' \cos \delta' \cos \alpha' &= x' + X'_\odot \\ R' \cos \delta' \sin \alpha' &= y' + Y'_\odot \\ R' \sin \delta' &= z' + Z'_\odot \end{aligned}\right\} \tag{7.69}$$

Din acest sistem se determină α', δ', care — după ce se ține cont de paralaxa geocentrică (cap. V) — se compară cu coordonatele ecuatoriale topocentrice α, δ.

Formulele (7.69), în care coordonatele x', y', z' se determină după procedeul menționat mai sus, se folosesc pentru calculul efemeridelor planetelor, cometelor, Lunii, sateliților artificiali ai Pământului etc.

Înțelegem prin *efemerida unui astru* un tabel cuprinzînd un șir de poziții ale astrului de pe sfera cerească, calculate cu suficientă precizie; de exemplu: tabelul cu un șir de valori ale coordonatelor ecuatoriale α și δ ale astrului respectiv, calculate pentru momente ce formează o progresie aritmetică.

În *practică*, pentru a compara pozițiile observate cu pozițiile calculate, coordonatele obținute din observații se corectează pe seama fenomenelor ce modifică pozițiile aștrilor pe cer, definite în cap. IV.

§ 7.5. PROBLEMA CELOR n ($n \geqslant 3$) CORPURI

1°. **Ecuațiile diferențiale ale mișcării absolute. Problema celor n corpuri** constă în studiul mișcării a trei sau a unui număr mai mare (dar finit) de corpuri (puncte materiale), sub acțiunea atracției mutuale dintre ele după legea lui Newton. *Ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului* de puncte materiale (P_0, m_0), (P_1, m_1), ..., (P_{n-1}, m_{n-1}), considerat izolat, se obțin la fel ca și în problema celor două corpuri.

Considerăm în spațiul E_3 un sistem de referință inerțial (fix) $OXYZ$ cu originea într-un punct arbitrar O, în care pozițiile punctelor materiale (P_i, m_i) $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ sînt determinate de vectorii $\vec{R}_i$ de componentele X_i, Y_i, Z_i (fig. 7.6). Prin r_{ij} vom nota distanța dintre punctele P_i și P_j, astfel că:

$$r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{R}_j - \vec{R}_i| = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \tag{7.70}$$

Punctul (P_i, m_i) este atras de către punctul (P_j, m_j) cu o forță a cărei mărime este:

$$|\vec{F}_{ij}| = G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1;\ i \neq j) \tag{7.71}$$

și a cărei direcție coincide cu direcția vectorului $\vec{r}_{ij} = \vec{R}_j - \vec{R}_i$; G este constanta atracției universale, iar distanța r_{ij} este dată de formula (7.70).

De aceea, *ecuațiile mișcării sistemului material considerat*, în ipoteza absenței forțelor exterioare, se scriu sub forma:

$$m_i \frac{d^2\vec{R}_i}{dt^2} = G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(i)}\, m_i m_j \frac{\vec{R}_j - \vec{R}_i}{r_{ij}^3}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7.72}$$

unde semnul (i) la sumă arată că la însumarea termenilor de la $j = 0$ pînă la $j = n - 1$ se exclude cazul $j = i$.

Evident, *în cazul problemei celor 3 corpuri* ($i = 0, 1, 2$), vom avea 3 ecuații vectoriale, în membrul doi al fiecăreia apărînd două forțe. Astfel, ecuațiile în această problemă vor fi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} &= Gm_1\frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{r_{01}^3} + Gm_2\frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{r_{02}^3} \\ \frac{d^2\vec{R}_1}{dt^2} &= Gm_0\frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{r_{10}^3} + Gm_2\frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{r_{12}^3} \\ \frac{d^2\vec{R}_2}{dt^2} &= Gm_0\frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_2}{r_{20}^3} + Gm_1\frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_2}{r_{21}^3} \end{aligned}\right\} \tag{7.72'}$$

În *proiecțiile pe axele sistemului de coordonate OXYZ*, ecuațiile vectoriale (7.72') ne conduc la următoarele sisteme:

$$\left.\begin{aligned} m_i\frac{d^2X_i}{dt^2} &= G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(i)}\, m_i m_j \frac{X_j - X_i}{r_{ij}^3} \\ m_i\frac{d^2Y_i}{dt^2} &= G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(i)}\, m_i m_j \frac{Y_j - Y_i}{r_{ij}^3} \\ m_i\frac{d^2Z_i}{dt^2} &= G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(i)}\, m_i m_j \frac{Z_j - Z_i}{r_{ij}^3} \end{aligned}\right\} \tag{7.73}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Aceste sisteme de ecuații diferențiale pot fi prezentate într-o formă compactă, dacă se introduce următoarea funcție scalară, numită *funcția de forță a sistemului de puncte materiale* (Lagrange, 1773):

$$U = G\sum_{\substack{i,j=0 \\ (i<j)}}^{n-1}{}^{(i)}\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{7.74}$$

(Sub semnul sumei, fiecare combinație a indicilor i și j se întîlnește o singură dată, iar combinația $i = j$ se exclude).

În *cazul problemei celor trei corpuri*:

$$U = G\left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_0}{r_{20}}\right) \tag{7.74'}$$

Cu ajutorul funcției de forță (7.74) și al formulei (7.70), ecuațiile (7.73) se scriu astfel:

$$\left.\begin{aligned} m_i \frac{d^2 X_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial X_i} \\ m_i \frac{d^2 Y_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial Y_i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \\ m_i \frac{d^2 Z_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial Z_i}, \end{aligned}\right\} \tag{7.75}$$

ceea ce este ușor de verificat prin calculul direct al derivatelor parțiale indicate.

Se observă că funcția de forță U și derivatele ei în raport cu X_i, Y_i, Z_i depind numai de coordonatele punctelor materiale, X_i, Y_i, Z_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$), și nu depind explicit de timpul t și nici de componentele vitezei absolute, $\dot{X}_i$, $\dot{Y}_i$, $\dot{Z}_i$.

Problema celor n corpuri revine la *integrarea sistemului de ecuații diferențiale ordinare* (7.75), adică la găsirea funcțiilor $X_i(t)$, $Y_i(t)$, $Z_i(t)$ care să satisfacă acest sistem diferențial, cu condițiile inițiale date; la $t = t_0$:

$$X_i(t_0) = X_i^{(0)}, \quad Y_i(t_0) = Y_i^{(0)}, \quad Z_i(t_0) = Z_i^{(0)}$$

și (7.76)

$$\dot{X}_i(t_0) = \dot{X}_i^{(0)}, \quad \dot{Y}_i(t_0) = \dot{Y}_i^{(0)}, \quad \dot{Z}_i(t_0) = \dot{Z}_i^{(0)}$$

(problemă *Cauchy*).

În teoria ecuațiilor diferențiale se stabilește, pentru sisteme și mai generale, *existența* și *unicitatea* soluției, în condițiile date. Dar rezolvarea concretă a problemei celor n corpuri n-a putut fi obținută în mod riguros pentru $n \geqslant 3$ nici pînă astăzi. (Pentru $n = 2$ avem, evident, problema celor două corpuri, a cărei soluție generală a fost obținută în paragraful precedent).

2°. **Integralele prime ale ecuațiilor diferențiale ale mișcării absolute.** Pe baza principiului al treilea al mecanicii, rezultă că suma forțelor interioare, precum și momentul rezultant al lor față de orice punct, invariabil legat de sistemul inerțial ales $OXYZ$, sînt zero. De aceea, din ecuațiile mișcării (7.72) rezultă:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = 0; \quad \sum_{i=0}^{n-1} m_i \vec{R}_i \times \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = 0.$$

De aici, după integrări succesive, obținem:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{d\vec{R}_i}{dt} = \vec{a}; \quad \sum_{i=0}^{n-1} m_i \vec{R}_i = \vec{a} \cdot t + \vec{b}, \tag{7.77}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \left(\vec{R}_i \times \frac{d\vec{R}_i}{dt} \right) = \vec{c} \tag{7.78}$$

unde $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ sînt *vectori constanți* ce se determină din condițiile inițiale

ale mișcării, adică cu ajutorul pozițiilor și vitezelor punctelor sistemului (P_0, m_0), (P_1, m_1), ..., (P_{n-1}, m_{n-1}) la un moment (oarecare) dat, t_0.

Relațiile (7.77) reprezintă, în proiecții pe axele de coordonate, *6 integrale prime* ale sistemului de ecuații diferențiale (7.73). Ele indică faptul că *centrul de masă al sistemului de puncte materiale*, definit prin vectorul de poziție $\vec{\rho} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \vec{R}_i / \sum_{i=0}^{n-1} m_i$, are o mișcare rectilinie și uniformă (fig. 7.6). Din acest motiv, integralele prime (7.77) (sau cele scalare echivalente) poartă denumirea de *integralele mișcării centrului de masă al sistemului mecanic considerat.* Ele se folosesc, de exemplu, la determinarea mișcării Soarelui față de centrul de masă al unui anumit grup de stele ce cuprinde în sine și Soarele (cap. IV).

Relația vectorială (7.78) are următoarea reprezentare analitică:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} m_i(Y_i\dot{Z}_i - Z_i\dot{Y}_i) &= c_X \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i(Z_i\dot{X}_i - X_i\dot{Z}_i) &= c_Y \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i(X_i\dot{Y}_i - Y_i\dot{X}_i) &= c_Z, \end{aligned}\right\} \tag{7.79}$$

acestea fiind încă *3 integrale prime* ale sistemului diferențial (7.73). Ele se numesc *integralele conservării momentului cinetic* sau *integralele ariilor.*

Dacă introducem *un nou sistem de coordonate* $OX'Y'Z'$, astfel ca OZ' *să coincidă cu vectorul* $\vec{c}$, atunci, în urma trecerii de la sistemul $OXYZ$ la sistemul $OX'Y'Z'$, în relațiile (7.79), transcrise în noul sistem (le notăm cu (7.79')), vom avea:

$$c_{X'} = c_{Y'} = 0; \qquad c_{Z'} = |\vec{c}| = c \tag{7.80}$$

Acest rezultat arată că *planul de coordonate* $Z' = 0$ *se bucură de proprietatea că media ponderată a vitezelor areolare ale proiecțiilor punctelor* (P_i, m_i) *pe acest plan* (interpretarea sumei respective din relațiile (7.79')) *este maximă. Acest plan este perpendicular pe vectorul* $\vec{c}$: de aceea, în virtutea relațiilor (7.79), el este pe deplin determinat prin condițiile inițiale ale mișcării (cazul $\vec{c} \neq \vec{0}$).

Dacă originea sistemului de referință se transpune în G — centrul de masă al sistemului, planul fix se numește *planul lui Laplace.* Acest plan a fost descoperit de Laplace, în 1789, care a arătat avantajul lui, în calitate de plan fundamental de referință, la *studiul mișcării planetelor pe intervale foarte mari de timp,* — în locul planelor eclipticii și ecuatorului, care, așa cum am văzut în cap. IV, nu sînt fixe. După *Clemence* și *Brouwer,* poziția planului lui Laplace este determinată față de ecliptică și echinocțiu 1950,0 cu ajutorul următoarelor elemente: $\Omega = 107°13'47'',6$; $i = 1°39'13'',96$, dacă se consideră valorile maselor determinate de *Newcomb.*

În sfîrșit, arătăm că sistemul (7.73) mai admite o *integrală primă,* pe care o deducem astfel.

Deoarece sistemul nostru mecanic este un sistem conservativ (existînd o funcție de forță uniformă ce nu depinde de timp), el se supune și legii de conservare a energiei mecanice. Într-adevăr, înmulțind ecuațiile

(7.75) respectiv cu $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$ şi adunînd expresiile obţinute membru cu membru, găsim:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(\dot{X}_i\ddot{X}_i + \dot{Y}_i\ddot{Y}_i + \dot{Z}_i\ddot{Z}_i) = \frac{dU}{dt},$$

de unde, după integrare, şi cu notaţia:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} m_i(\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2), \tag{7.81}$$

ce reprezintă energia cinetică a sistemului, obţinem *integrala energiei*:

$$\mathcal{E} + (-U) = h, \tag{7.82}$$

h fiind *constanta energiei.*

Deoarece energia potenţială a sistemului este $(-U)$, *integrala energiei* (7.82) *exprimă legea de conservare (în tot timpul mişcării) a energiei mecanice a sistemului.*

Am obţinut deci *10 integrale prime* ale sistemului (7.73) sau (7.75) de ordinul $6n$, integrale care permit reducerea ordinului sistemului la $6n - 10$.

În 1887, *Bruns* a arătat că, în cazul problemei celor trei corpuri, orice integrală primă algebrică faţă de X_i, Y_i, Z_i, $\dot{X}_i$, $\dot{Y}_i$, $\dot{Z}_i$ este o consecinţă a celor 10 integrale şi deci nu există alte integrale prime care ar permite reducerea pe mai departe a ordinului sistemului (7.73).

3°. **Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării relative. Funcţia perturbatoare.** Pentru nevoile practice ale astronomiei (construirea efemeridelor, prevederea eclipselor etc.), un interes deosebit îl prezintă *coordonatele carteziene relative* x_i, y_i, z_i. În funcţie de caracterul problemei de rezolvat, coordonatele relative pot fi alese în diferite moduri.

Vom alege *sistemul de coordonate relative astfel ca originea acestuia să fie într-unul din punctele materiale,* axele fiind paralele cu axele sistemului absolut. Acest fapt reduce, cum se va vedea, cu 6 unităţi ordinul sistemului diferenţial al mişcării absolute. Fie *originea noului sistem de referinţă punctul material* (P_0, m_0), *axele sistemului* notîndu-se cu P_0x, P_0y, P_0z (fig. 7.6). Din fig. 7.6 se vede că:

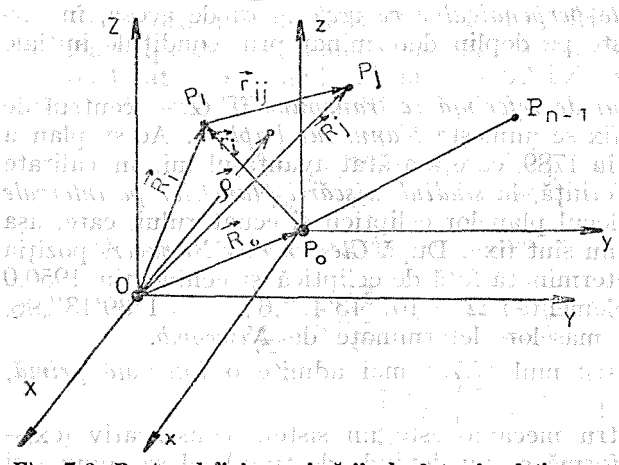


Fig. 7.6. Pentru definirea mişcării absolute şi relative a unui sistem de puncte materiale.

$$\vec{R}_i = \vec{R}_0 + \vec{r}_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{7.83}$$

(coordonatele punctului P_0 în noul sistem de coordonate fiind $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$),

sau

$$\left.\begin{aligned} X_i &= X_0 + x_i, \\ Y_i &= Y_0 + y_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ Z_i &= Z_0 + z_i. \end{aligned}\right\} \tag{7.83'}$$

Ecuațiile (7.72), respectiv sistemul (7.73), ținînd cont și de (7.83) respectiv (7.83'), ne dau următoarele ecuații, în care, datorită rolului special al punctului (P_0, m_0), termenii în m_0 se grupează separat:

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_i}{\mathrm{d}t^2} = G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(i)} m_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} = -Gm_i m_0 \frac{\vec{r}_i}{r_{0i}^3} + G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(0,i)} m_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} \tag{7.84}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_0}{\mathrm{d}t^2} = G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(0)} m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_0}{r_{0j}^3} = Gm_i \frac{\vec{r}_i}{r_{0i}^3} + G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(0,i)} m_j \frac{\vec{r}_j}{r_{0j}^3}, \tag{7.85}$$

la fiecare semn al sumei indicîndu-se acele valori ale indicilor care se omit la însumarea după j; sau:

$$\frac{\mathrm{d}^2X_i}{\mathrm{d}t^2} = -Gm_0\frac{x_i}{r_{0i}^3} + G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(0,i)} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \tag{7.84'}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}^2X_0}{\mathrm{d}t^2} = Gm_i\frac{x_i}{r_{0i}^3} + G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(0,i)} m_j \frac{x_j}{r_{0j}^3} \tag{7.85'}$$

Punînd $r_{0i} = r_i$ și scăzînd (7.85') din (7.84'), obținem:

$$\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2} = -G(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} + G\sum_{j=0}^{n-1}{}^{(0,i)} m_j\left(\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3}\right), \tag{7.86}$$

unde

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2; \quad r_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 \tag{7.87}$$

(În mod analog se scriu și ecuațiile pentru $\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2}$ și $\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2}$.)

Aceste ecuații determină mișcarea punctelor materiale (P_1, m_1), (P_2, m_2) $\ldots$, (P_{n-1}, m_{n-1}) față de punctul material (P_0, m_0).

Punînd

$$\mathcal{R}_i = G\sum_{j=1}^{n-1}{}^{(i)} m_j\left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j}{r_j^3}\right) (i = 1, 2, \ldots n-1), \tag{7.88}$$

ecuațiile (7.86) se scriu astfel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_i}{dt^2} + G(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial x_i} \\ \frac{d^2y_i}{dt^2} + G(m_0 + m_i)\frac{y_i}{r_i^3} &= \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \frac{d^2z_i}{dt^2} + G(m_0 + m_i)\frac{z_i}{r_i^3} &= \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \tag{7.89}$$

Dacă masele, cu excepția lui m_0 și m_i, sînt nule, atunci $\mathcal{R}_i = 0$ și ecuațiile (7.89) reprezintă ecuațiile mișcării punctului material (P_i, m_i) față de punctul material (P_0, m_0), adică ecuațiile problemei celor două corpuri.

Deoarece *mișcarea kepleriană ce are loc în problema celor două corpuri se numește mișcare neperturbată*, iar orice abatere de la această mișcare — *perturbație*, funcția $\mathcal{R}_i$, a cărei prezență presupune perturbație, a căpătat denumirea de *funcție perturbatoare*.

Întrucît ecuațiile (7.89) stau la baza *teoriei mișcării planetelor*, ele se mai numesc și *forma planetară a ecuațiilor mișcării relative*. La studiul mișcării planetelor ($i = 1, 2, \ldots, 9$), drept *corp central se ia Soarele*; în acest caz, masele planetelor fiind mici în raport cu masa Soarelui, membrii doi ai ecuațiilor (7.89) sînt foarte mici și influența lor asupra planetei în studiu poate fi considerată într-adevăr ca perturbație.

Ecuațiile (7.89) au *patru integrale algebrice* (trei integrale ale ariilor și integrala energiei), a căror deducere se face fie direct (ca în punctul precedent), fie prin transformarea integralelor similare din mișcarea absolută, cu ajutorul relațiilor de transformare (7.83'). Vom lăsa efectuarea acestui calcul pe seama cititorului.

Sistemul ecuațiilor mișcării perturbate (7.89), de ordinul $6n-6$, așa cum s-a mai spus, nu poate fi integrat riguros (în termeni finiți), în cazul general al condițiilor inițiale. El poate fi însă soluționat prin diferite metode de integrare aproximativă (metoda variației constantelor de integrare, metode de integrare numerică etc.).

În *problema celor trei corpuri* există *două cazuri de mișcări*, descoperite de Euler și Lagrange, *cînd ecuațiile mișcării admit o soluție riguroasă și exactă*.

În *soluția lui Euler*, cele trei corpuri se mișcă într-un plan fix, rămînînd așezate tot timpul pe o dreaptă ce trece prin centrul comun de masă. În acest caz, mișcarea fiecărui corp în jurul centrului comun de masă se produce după legile generalizate ale lui Kepler.

În *soluția lui Lagrange*, cele trei corpuri se mișcă într-un plan fix, formînd tot timpul un triunghi echilateral, ale cărui dimensiuni și orientare sînt variabile cu timpul. În acest caz, mișcarea fiecăruia din cele trei corpuri în raport cu centrul comun de masă se face ca și cum fiecare dintre ele ar fi atras de o masă egală cu suma maselor celorlalte două corpuri și situată în centrul comun de masă; deci și în acest caz mișcările se fac după legile generalizate ale lui Kepler.

Soluțiile lui Euler și Lagrange ale problemei celor trei corpuri, cînd cele trei corpuri descriu elipse, constituie exemple de *soluții periodice* în problema celor trei corpuri.

Ca unul din cele mai de seamă rezultate ale mecanicii cereşti, menţionăm *descoperirea neobişnuită*, numai prin calcul, *a planetei Neptun*. Această descoperire a fost făcută aproape în acelaşi timp, şi independent unul de altul, de doi tineri astronomi: englezul *J. Adams* şi francezul *Le Verrier*; planeta a fost observată de astronomul *Galle* de la Observatorul din Berlin, în 1846, la mai puţin de 1° de poziţia indicată de Le Verrier.

În ţara noastră, contribuţii de seamă la studiul traiectoriilor din problema a n ($n \geqslant 3$) corpuri au adus *S. C. Haret* (1851—1912), *N. Coculescu* (1866—1952) şi prof. *C. Drâmbă* (n. 1907), actualul preşedinte al Comitetului Naţional Român de Astronomie.

4°. **Avansul periheliului lui Mercur şi teoria relativităţii a lui Einstein.** Am văzut că orbita neperturbată a unei planete se caracterizează printr-o longitudine constantă a periheliului ($\omega = \text{const.}$). Perturbaţiile din partea celorlalte planete, aşa cum arată *teoriile mecanicii cereşti clasice*, determină o rotaţie lentă a orbitei planetei în planul ei, în sensul mişcării, drept care periheliul (şi afeliul) planetei îşi schimbă continuu longitudinea, ceea ce se şi observă în realitate (fig. 7.7).

Dar compararea mişcării observate a periheliului ($\delta\omega_0$) cu rezultatul calculului teoretic, bazat pe teoriile mecanicii cereşti clasice (newtoniene) ($\delta\omega_c$), duce în cazul planetei Mercur la o diferenţă care a rămas mult timp inexplicabilă. Această diferenţă este:

$$\delta\bar{\omega} \equiv \delta\omega_{(o-c)} = \delta\omega_o - \delta\omega_c = (572'' - 530'') \text{ pe secol} = 42'' \text{ pe secol},$$

valoare găsită încă de Newcomb în anul 1895.

Această abatere de la legea gravitaţiei a lui Newton a căpătat o *explicaţie* satisfăcătoare abia în 1915, pe baza *teoriei relativităţii generale a lui Einstein**. Potrivit acestei teorii, deplasarea periheliului se produce *şi în cazul unei mişcări neperturbate* a planetei, aşa cum vom vedea, foarte sumar, în cele ce urmează.

Deplasarea relativistă („extranewtoniană", cum i se mai spune) a periheliului planetei *pentru o revoluţie* completă a planetei în jurul Soarelui (anomalia adevărată v parcurge intervalul $[0, 2\pi]$) va fi

$$\delta\omega = \frac{6\pi \mathcal{M} G}{ac^2(1 - e^2)}, \qquad (7.90)$$

unde $\mathcal{M}$ — masa Soarelui, G — constanta gravitaţională, a — semiaxa mare a elipsei, e — excentricitatea elipsei, c — viteza luminii.

Avansul periheliului planetei *pe un secol* se obţine astfel:

$$\delta\bar{\omega} = \frac{36\,525}{T}\,\delta\omega, \qquad (7.91)$$

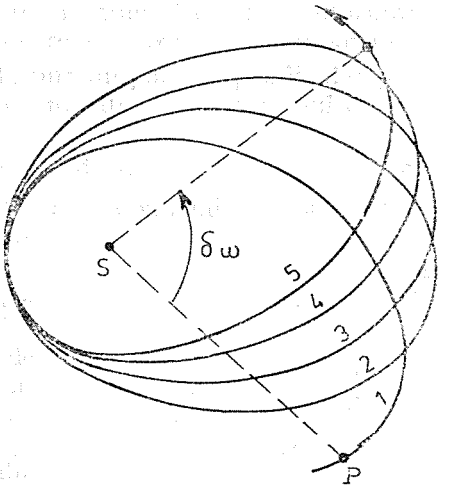


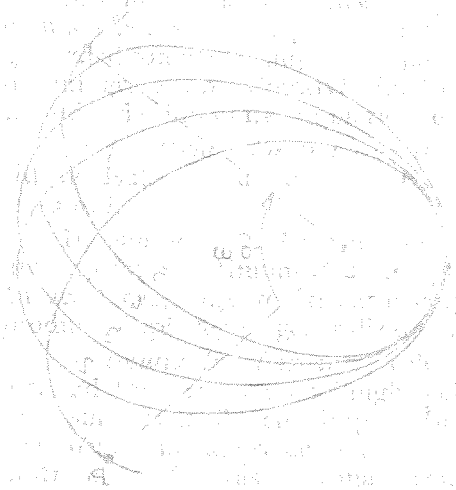
Fig. 7.7. Avansul periheliului şi afeliului planetei Mercur.

* *Teoria relativităţii* ca disciplină de sine stătătoare figurează în planurile de învăţământ atît pentru facultăţile de matematică, cît şi pentru facultăţile de fizică.

unde T este perioada de revoluție siderală a planetei, iar $\delta\omega$ se calculează pe baza formulei (7.90).

În cazul particular al mișcării *planetei Mercur*, după această formulă obținem: $a = 5{,}8 \cdot 10^{12}$ cm, $e = 0{,}2056$ și $\delta\overline{\omega} = 42'',9$. Această valoare este într-o foarte bună concordanță cu rezultatele observațiilor. De aceea, mișcarea periheliului lui Mercur este considerată drept *o confirmare a teoriei relativității generale.*

Deplasarea periheliului se produce și la alte planete, dar valoarea ei este mult mai mică decît în cazul lui Mercur; astfel, pentru Venus avem $8'',6$, pentru Pămînt $3'',8$, pentru Marte $2'',5$ etc. Însă în decursul mai multor secole, corecțiile calculate după formula (7.91) devin, pentru toate planetele, perceptibile.



CAPITOLUL VIII

TEORIA RADIAȚIEI. FOTOMETRIA ASTRONOMICĂ

§ 8.1. INTENSITATE. FLUX. INTENSITATEA MEDIE PE DISCUL APARENT

1°. **Intensitatea specifică a radiației.** Să considerăm un element de arie $d\sigma$, în jurul punctului P, pe suprafața unui astru oarecare. Fie $\vec{n}$ versorul normalei exterioare la suprafață în P (fig. 8.1). Prin $d\sigma$ trec radiații de toate lungimile de undă, în toate direcțiile. Să considerăm o direcție de versor $\vec{u}(\theta, \Phi)$, unde θ este unghiul format de $\vec{u}$ cu normala la suprafață, $\vec{n}$; iar Φ este unghiul format de proiecția $\vec{u}'$ a lui $\vec{u}$ în planul tangent la suprafața astrului în P, cu o direcție fixă PA în acest plan (elementul $d\sigma$ poate fi considerat în planul tangent).

Fie $d\mathscr{E}_\nu$ energia radiațiilor cu frecvența cuprinsă între ν și $\nu + d\nu$, care trec prin elementul de arie $d\sigma$; în interiorul unui trunchi de con, de unghi solid $d\omega$, având ca axă pe $\vec{u}$ (fig. 8.1), a cărui generatoare se sprijină pe frontiera lui $d\sigma$, radiații ce trec în timpul dt. În conformitate cu datele fizicii experimentale, această energie se consideră proporțională cu aria aparentă $d\sigma \cos\theta$ (proiecția lui $d\sigma$ într-un plan perpendicular pe $\vec{u}$), cu unghiul solid $d\omega$, cu intervalul de frecvență $d\nu$ și cu intervalul de timp dt, adică

$$d\mathscr{E}_\nu = I_\nu \cos\theta \, d\sigma \, d\omega \, d\nu \, dt \qquad (8.1)$$

unde „coeficientul" de proporționalitate I_ν, depinzînd de proprietățile fizice ale materiei care radiază, se numește intensitate specifică a radiației.

Din relația (8.1) rezultă că *intensitatea specifică a radiației*, I_ν, într-un punct dat și pe o direcție dată este cantitatea de energie transportată de radiații prin unitatea de arie așezată perpendicular pe direcția considerată, în unitatea de timp, în unitatea de unghi solid și în intervalul unitar de frecvență. Intensitatea specifică a radiației se măsoară în $W/m^2 \cdot sr \cdot Hz$ (în S.I.).

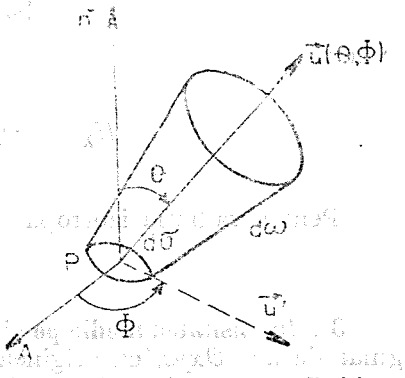


Fig. 8.1. Intensitatea radiației.

Așa cum a fost definită, intensitatea specifică a radiației este în general

funcție de poziția punctului în spațiu $P(x, y, z)$ și de direcția considerată $\vec{u}(\theta, \Phi)$, adică $I_\nu = I_\nu(x, y, z, \theta, \Phi)$. O sursă de radiații (de exemplu, o stea) generează în jurul său un cîmp de radiații, în fiecare punct și pe orice direcție putîndu-se defini mărimea I_ν. Cîmpul de radiații se numește *omogen* dacă I_ν nu depinde de punctul P. Luînd acest punct pe suprafața astrului, cîmpul de radiații se poate considera omogen, adică $I_\nu = I_\nu(\theta, \Phi)$. Cîmpul de radiații se numește *izotrop* dacă I_ν nu depinde de direcție. Observațiile asupra Soarelui și a stelelor duble cu eclipsă, ca și teoria atmosferelor stelare, arată că I_ν se poate considera, în general, independent de Φ, dar depinde de θ (fenomenul de *întunecare spre margine*). De aceea, în continuare vom considera că $I_\nu = I_\nu(\theta)$.

Am definit intensitatea specifică I_ν în raport cu frecvența radiațiilor. În mod analog se poate defini intensitatea specifică I_λ în raport cu lungimea de undă a radiațiilor, pe baza relației

$$d\mathcal{E}_\lambda = I_\lambda \cos\theta \, d\sigma \, d\omega \, d\lambda \, dt. \tag{8.2}$$

I_λ se măsoară în $W/m^2 \cdot sr \cdot \mu$. Conform celor spuse înainte, $I_\lambda = I_\lambda(\theta)$. În continuare vom considera, mai frecvent, intensitatea specifică I_λ.

2°. **Fluxul specific spre exterior.** Cantitatea de energie transportată de radiații prin unitatea de arie de pe suprafața astrului, în unitatea de timp, pe interval unitar de lungimi de undă, în interiorul trunchiului de con de unghi solid $d\omega$, se numește *flux specific elementar*, $d\mathcal{F}_\lambda$. Din (8.2) rezultă

$$d\mathcal{F}_\lambda = I_\lambda \cos\theta \, d\omega. \tag{8.3}$$

Fluxul specific $\mathcal{F}_\lambda(\Omega)$, într-un anumit unghi solid Ω, va fi

$$\mathcal{F}_\lambda(\Omega) = \int_\Omega I_\lambda \cos\theta \, d\omega, \tag{8.4}$$

integrarea efectuîndu-se după toate direcțiile cuprinse în unghiul solid Ω — dat. În particular, Ω poate cuprinde întreg spațiul (toate direcțiile ce trec prin P, măs $\Omega = 4\pi$). Dacă prin Ω înțelegem domeniul: $\Omega_{ext} = \{(\theta, \Phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \ 0 \leqslant \Phi \leqslant 2\pi\}$ (semispațiul exterior față de $d\sigma$), atunci fluxul $\mathcal{F}_\lambda(\Omega_{ext}) \equiv H_\lambda$ se numește *flux specific spre exterior*. Introducînd expresia unghiului solid elementar

$$d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\Phi, \tag{8.5}$$

rezultă

$$H_\lambda = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\lambda(\theta) \cos\theta \sin\theta \, d\theta. \tag{8.6}$$

Pentru radiația izotropă (I_λ nu depinde de θ), din (8.6) rezultă

$$H_\lambda = \pi I_\lambda. \tag{8.7}$$

3°. **Intensitatea medie pe discul aparent.** Să considerăm un sistem rectangular de axe $Oxyz$, cu originea O în centrul astrului, cu axa Oz orientată spre observator, iar planul Oxy perpendicular pe Oz (fig. 8.2). Proiecția

elementului de arie $d\sigma$ într-un plan perpendicular pe raza vizuală (direcția spre observator), va fi $d\sigma \cos\theta$. Vom introduce o valoare medie a intensității specifice, prin relația

$$\bar{I}_\lambda = \frac{\int\limits_{\Sigma} I_\lambda \cos\theta \, d\sigma}{\int\limits_{\Sigma} \cos\theta \, d\sigma} \qquad (8.8)$$

unde Σ este emisfera vizibilă a astrului considerat sferic. Punînd

$$d\sigma = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi \qquad (8.9)$$

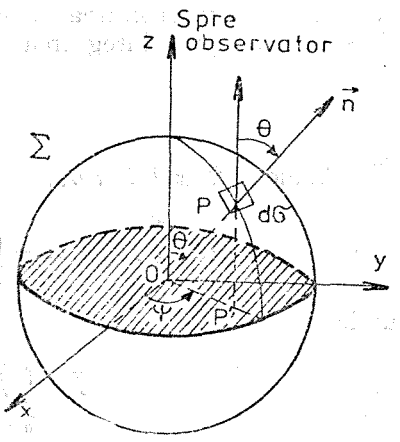


Fig. 8.2. Intensitatea medie pe disc

unde R este raza astrului, din (8.8) obținem ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$; $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$)

$$\bar{I}_\lambda = 2 \int\limits_0^{\pi/2} I_\lambda(\theta) \cos\theta \sin\theta \, d\theta. \qquad (8.10$$

Numitorul fracției (8.8) are mărimea πR^2 — aria discului aparent al astrului (proiecția emisferei vizibile pe planul perpendicular la raza vizuală), deci mărimea $\bar{I}_\lambda$ reprezintă *intensitatea specifică medie pe discul aparent* al astrului.

Comparînd relațiile (8.6) și (8.10), rezultă

$$H_\lambda = \pi \bar{I}_\lambda \qquad (8.11)$$

adică pentru calculul fluxului specific spre exterior, H_λ, se poate utiliza relația (8.7) și în cazul radiației anizotrope, cu condiția să înlocuim pe I_λ cu $\bar{I}_\lambda$.

Observație. Uneori se utilizează noțiunea de flux specific mediu spre exterior, F_λ, definit prin relația

$$F_\lambda = \frac{\int\limits_{\Omega_{ext}} I_\lambda \cos\theta \, d\omega}{\int\limits_{\Omega_{ext}} \cos\theta \, d\omega} \qquad (8.12)$$

Ținînd seama de (8.5) și explicitînd integralele din (8.12), rezultă

$$F_\lambda = \bar{I}_\lambda \quad \text{și} \quad H_\lambda = \pi F_\lambda, \qquad (8.13)$$

adică fluxul specific mediu spre exterior este egal cu intensitatea specifică medie pe discul astrului.

4°. **Mărimi integrale.** Pentru fiecare mărime specifică se poate defini mărimea integrală corespunzătoare, caracterizînd radiațiile din întreg spectrul electromagnetic. Astfel, pentru radiațiile cu lungimea de undă între

λ și $\lambda + d\lambda$, intensitatea va fi $I_\lambda d\lambda$, iar *intensitatea integrală* a radiației, I, se obține prin integrarea pe întreg spectrul

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \tag{8.14}$$

Analog, *fluxul integral spre exterior* va fi

$$H = \int_0^\infty H_\lambda d\lambda = \pi \int_0^\infty \overline{I}_\lambda \, d\lambda = \pi \int_0^\infty F_\lambda d\lambda = \pi \overline{I} = \pi F, \tag{8.15}$$

unde

$$\overline{I} = \int_0^\infty \overline{I}_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty F_\lambda d\lambda = F \tag{8.16}$$

este *intensitatea integrală medie* pe discul astrului, egală cu *fluxul integral mediu* spre exterior.

Mărimile integrale se mai numesc și *mărimi bolometrice* (determinîndu-se cu aparatul numit bolometru).

§ 8.2. LUMINOZITATEA ȘI STRĂLUCIREA ASTRULUI

1°. **Luminozitatea astrului.** Am văzut că fluxul specific emis de unitatea de arie de pe suprafața unui astru este $H_\lambda = \pi \overline{I}_\lambda$. *Fluxul specific total*, emis de întreagă suprafața S a stelei, se numește *luminozitate specifică* a astrului, L_λ. Considerînd cîmpul radiativ generat de astru ca fiind omogen, luminozitatea lui specifică va fi dată de expresia

$$L_\lambda = \int_S H_\lambda d\sigma = 4\pi R^2 H_\lambda = 4\pi R^2 \cdot \pi \overline{I}_\lambda \tag{8.17}$$

unde R este raza astrului, care s-a considerat sferic.

Analog, *luminozitatea integrală a astrului*, L, (fluxul integral total) va fi dată de relația

$$L = 4\pi R^2 H = 4\pi R^2 \cdot \pi \overline{I} \tag{8.18}$$

Luminozitatea integrală se mai numește și bolometrică. Ea măsoară energia *radiației totale* emisă de stea în unitatea de timp (pe toată suprafața astrului, pe toate lungimile de undă și în toate direcțiile). Ca mărime fizică, ea are dimensiunea de *putere*, măsurîndu-se în W.

2°. **Strălucirea aparentă a astrului.** Să vedem cum se face trecerea energiei radiante $d\mathcal{E}_\lambda$, dată de expresia (8.2), de la un element de arie la altul. Fie $d\sigma$ un element de arie, în jurul punctului P, pe suprafața astrului, avînd pe $\vec{n}$ ca versor al normalei la suprafața astrului în P și emițînd energia $d\mathcal{E}_\lambda$. Fie $d\sigma'$ un element de arie în spațiu, în jurul punctului P', avînd pe $\vec{n}'$ ca versor normal și fiind iluminat de $d\sigma$ (fig. 8.3). Fie r distanța dintre P și P', iar θ și θ'

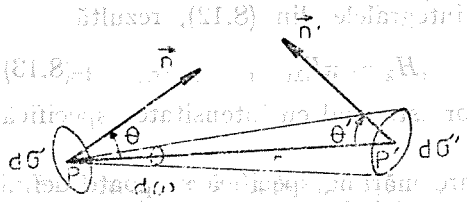


Fig. 8.3. Iluminarea elementului $d\sigma'$ de către $d\sigma$.

unghiurile formate de PP' cu n și n'. Fie $d\omega$ unghiul solid elementar sub care se vede elementul $d\sigma'$ din punctul P. Expresia lui este

$$d\omega = \frac{d\sigma' \cos \theta'}{r^2} \tag{8.19}$$

Din relațiile (8.2) și (8.19) rezultă că energia care trece de la $d\sigma$ la $d\sigma'$ este dată de relația

$$d\mathcal{E}_\lambda = I_\lambda \frac{\cos \theta \, d\sigma \cos \theta' \, d\sigma'}{r^2} d\lambda \, dt. \tag{8.20}$$

Se observă că relația (8.20) este simetrică în raport cu $d\sigma$ și $d\sigma'$.

Strălucirea aparentă specifică a unui astru, E_λ, este cantitatea de energie primită de la astru, în unitatea de timp, într-un interval unitar de lungime de undă, pe unitatea de arie așezată perpendicular pe direcția spre astru. Din relația (8.20) rezultă

$$dE_\lambda = I_\lambda \frac{\cos \theta \, d\sigma}{r^2} \tag{8.21}$$

Introducînd expresia (8.9) a lui $d\sigma$ în relația (8.21), ținînd seama de faptul că $r \gg R$ (chiar și pentru cea mai apropiată stea — Soarele), încît practic r este același pentru orice punct P al emisferei vizibile și integrînd pe întreaga emisferă vizibilă, obținem

$$E_\lambda = \frac{2\pi R^2}{r^2} \int_0^{\pi/2} I_\lambda (\theta) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \tag{8.22}$$

Utilizînd relațiile (8.10), (8.11) și (8.17), rezultă

$$E_\lambda = \frac{R^2}{r^2} \cdot \pi \bar{I}_\lambda = \frac{R^2}{r^2} H_\lambda = \frac{L_\lambda}{4\pi r^2} \tag{8.23}$$

Strălucirea aparentă integrală a astrului, E, va fi

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = \frac{R^2}{r^2} \cdot \pi \bar{I} = \frac{R^2}{r^2} H = \frac{L}{4\pi r^2}, \tag{8.24}$$

reprezentînd iluminarea integrală produsă de astru pe unitatea de arie situată la distanța r de el. E se măsoară în W/m^2. Strălucirea aparentă este numită de unii autori *densitate de flux*.

3°. **Strălucirea aparentă standard a astrului.** Întrucît strălucirile aparente ale astrilor depind de distanțele lor, nu se pot compara direct energiile emise (mai ales atunci cînd nu cunoaștem aceste distanțe). Pentru a putea face această comparare, măsurările fotometrice se reduc la o distanță standard de 10 parseci. Iluminarea pe care ar produce-o astrul dacă s-ar afla la această distanță standard se numește *strălucire aparentă standard* a astrului, sau scurt *strălucire standard*.

Strălucirea standard specifică se notează cu $E_{\lambda st}$, iar *strălucirea standard integrală* cu E_{st}.

1°. **Coeficientul de emisie.** Fie dv un volum elementar dintr-un gaz incandescent (materia stelară se comportă ca un gaz incandescent, parțial sau total ionizat — plasmă). Fie ρ densitatea gazului.

În intervalul de frecvență $(\nu, \nu + d\nu)$ și în timpul dt, acest volum va emite energia

$$d\mathcal{E}_\nu = j_\nu \rho dv d\nu dt, \tag{8.25}$$

unde j_ν este coeficientul de emisie al gazului considerat.

Conform relației (8.25) se numește coeficient de emisie al unei substanțe cantitatea de energie emisă de unitatea de masă din substanța considerată, în unitatea de timp, pe un interval unitar de frecvență, în toate direcțiile.

2°. **Coeficientul de absorbție și adîncimea optică.** Să considerăm acum un strat de substanță absorbantă de grosime x. Fie I_ν^0 intensitatea specifică a radiației ce cade normal pe strat. Traversînd stratul de densitate ρ, radiația își micșorează intensitatea, care într-un punct oarecare are valoarea $I_\nu(s)$. Pe drumul ds (fig. 8.4), variația intensității este

$$dI_\nu = -\kappa_\nu I_\nu \rho \, ds \tag{8.26}$$

unde κ_ν este *coeficientul de absorbție al substanței, pe frecvența* ν, calculat pe unitatea de masă. Integrînd ecuația (8.26) și considerînd că $\rho = \text{const.}$, iar κ_ν nu depinde de s, obținem

$$I_\nu(x) = I_\nu^0 e^{-\kappa_\nu \rho x} \tag{8.27}$$

În general $\rho = \rho(s)$, iar $\kappa_\nu = \kappa_\nu(\rho, s)$. În acest caz se efectuează schimbarea de variabilă independentă

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho ds, \tag{8.28}$$

adică

$$\tau_\nu = \int_0^x \kappa_\nu \rho ds, \tag{8.29}$$

iar soluția ecuației diferențiale (8.26) este

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} \tag{8.30}$$

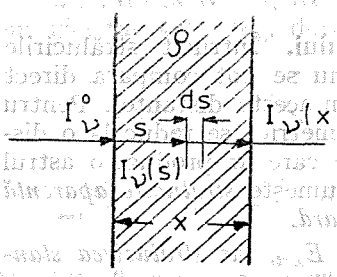


Fig. 8.4. Absorbția radiației.

Mărimea τ_ν, definită prin expresia (8.29) se numește *adîncime optică (monocromatică)*. Dacă radiația străbate un strat absorbant de adîncime optică $\tau_\nu = 1$, intensitatea ei este slăbită în rapotul $1/e$. *Adîncimea optică integrală*, τ, se poate defini în mod analog, cu ajutorul coeficientului de absorbție κ (pentru radiația integrală).

Se numește *corp negru* sau *radiator integral* un corp care absoarbe complet radiațiile electromagnetice incidente. Fiind un absorbant perfect, corpul negru este în același timp un radiator perfect, care, menținut în echilibru termic cu mediul ambiant (T = constant), emite o cantitate de energie egală cu energia absorbită.

Radiatorul integral este un corp ideal, care din punct de vedere experimental poate fi aproximat cu așa-numita *incintă izotermă:* o cavitate cu pereți opaci la radiația termică, în care se practică un orificiu. Radiația de echilibru (termodinamic) a orificiului modelează radiația corpului negru. Această radiație are proprietăți deosebit de simple, ea nedepinzînd de forma corpului, de compoziția lui chimică etc., ci numai de lungimea de undă (respectiv de frecvență) și de temperatura absolută T. În majoritatea cazurilor, radiația corpurilor cerești poate fi descrisă cu legile de radiație ale corpului negru.

Pentru un corp negru, în echilibru termic cu mediul ambiant, este valabilă *legea lui Kirchhoff,* care afirmă că raportul j_ν/κ_ν depinde numai de temperatura absolută T (la o frecvență dată), adică

$$j_\nu/\kappa_\nu = 4\pi B_\nu(T), \tag{8.31}$$

unde $B_\nu(T)$ este *intensitatea specifică a radiației emise* de corpul negru.

Elaborînd teoria cuantică a radiației, Planck a arătat că funcția $B_\nu(T)$ — numită *funcția lui Planck* — are forma

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \tag{8.32}$$

unde $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ este constanta lui Planck, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K este constanta lui Boltzmann, iar c este viteza luminii. Ecuația (8.32) reprezintă *legea lui Planck.* Aceasta se poate transcrie în scara lungimilor de undă. Funcția Planck, $B_\lambda(T)$, corespunzătoare are expresia

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1} \tag{8.33}$$

Considerînd că materia stelară se comportă ca un corp negru, intensitatea specifică medie pe discul stelei va fi dată de funcția lui Planck (8.33), adică

$$\bar{I}_\lambda = B_\lambda(T), \tag{8.34}$$

iar fluxul specific spre exterior va avea expresia

$$H_\lambda = \pi \bar{I}_\lambda = \pi B_\lambda(T) \tag{8.35}$$

Analog, pentru radiația integrală avem

$$\bar{I} = B,\ H = \pi B, \tag{8.36}$$

unde

$$B = \int_0^\infty B_\lambda(T)\,d\lambda \tag{8.37}$$

Introducînd expresia (8.33) sub integrala (8.37) şi efectuînd integrarea, rezultă

$$H = \pi B = \sigma T^4, \tag{8.38}$$

unde $\sigma = 2\pi^5 k^4/15h^3c^2 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4 este constanta lui Stefan. Ecuaţia (8.38) exprimă *legea lui Stefan—Boltzmann:* fluxul integral emis de unitatea de arie de pe suprafaţa corpului negru este proporţional cu puterea a patra a temperaturii lui absolute. Temperatura astrului determinată cu ajutorul acestei legi se numeşte *temperatură efectivă.*

Din expresia (8.33) rezultă că maximul intensităţii specifice $B_\lambda(T)$ este atins la lungimea de undă λ_m, dată de relaţia

$$\lambda_m T = b, \tag{8.39}$$

unde $b = 2{,}8978 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K este constanta lui Wien. Relaţia (8.39) exprimă *legea lui Wien* (legea deplasării): cînd T creşte, maximul se deplasează spre capătul violet al spectrului vizibil.

Funcţia lui Planck admite două expresii asimptotice şi anume:

— pentru $\lambda T < 3 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K

$$B_\lambda(T) \simeq \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/k\lambda T} \tag{8.40}$$

— aproximaţia Wien la legea lui Planck,

— pentru $\lambda T > 0{,}77$ m $\cdot$ K

$$B_\lambda(T) \simeq 2ck\lambda^{-4}T \tag{8.41}$$

— aproximaţia Rayleigh—Jeans la legea lui Planck.

§ 8.5. DENSITATEA DE ENERGIE RADIANTĂ ŞI PRESIUNEA DE RADIAŢIE

1°. **Densitatea de energie radiantă.** Se numeşte *densitate de energie radiantă*, u, într-un punct dat, la un moment dat, cantitatea de energie radiantă care trece, în unitatea de timp, prin unitatea de volum ce conţine punctul considerat.

Prin unghiul solid $d\omega$ intră în volumul considerat, în unitatea de timp, cantitatea de energie $I d\omega$, I fiind intensitatea integrală a radiaţiei. Deoarece radiaţia vine din toate direcţiile, cantitatea totală de energie radiantă ce intră în unitatea de volum va fi $\int_{4\pi} I d\omega$, unde simbolul $\int_{4\pi}$ exprimă faptul că integrarea se face după toate direcţiile ce trec prin punctul considerat (pe un unghi solid de măsură 4π). Dar radiaţia se răspîndeşte cu viteza c, deci

$$u = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I d\omega \tag{8.42}$$

Pentru radiația izotropă și pentru cazul corpului negru, avem

$$u = \frac{4\pi I}{c} = \frac{4\pi B}{c} = \frac{4\sigma}{c} T^4 = aT^4, \quad a = \frac{4\sigma}{c} \tag{8.43}$$

Mai sus a fost definită *densitatea de energie a radiației integrale*. În mod analog se poate defini *densitatea de energie a radiației monocromatice*, u_ν, pentru care avem

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu \mathrm{d}\omega \tag{8.44}$$

și respectiv

$$u_\nu = \frac{4\pi I_\nu}{c} = \frac{4\pi B_\nu(T)}{c} \tag{8.45}$$

2°. **Presiunea de radiație.** Fiecare foton (cuantă) de energie $h\nu$ transportă în direcția mișcării sale un impuls de mărime $h\nu/c$. Prin elementul de arie $\mathrm{d}\sigma$ (fig. 8.1), în timpul $\mathrm{d}t$, în unghiul solid $\mathrm{d}\omega$ trece în direcția $u(\theta, \Phi)$ energia integrală

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = I \cos\theta \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}t, \tag{8.46}$$

căreia îi corespunde un impuls de mărime

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{c} = \frac{1}{c} I \cos\theta \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}t, \tag{8.47}$$

dirijat după versorul $\vec{u}(\theta, \Phi)$. Proiecția impulsului pe direcția normalei la suprafață, $\vec{n}$, este

$$\left(\frac{1}{c} I \cos\theta \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}t\right) \cos\theta = \frac{1}{c} I \cos^2\theta \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}t \tag{8.48}$$

Dacă ultima expresie (8.48) o împărțim cu $\mathrm{d}t$, obținem forța care generează impulsul pe direcția normalei la suprafață, iar dacă o mai împărțim și cu $\mathrm{d}\sigma$, obținem presiunea de radiație elementară, $\mathrm{d}P_{rad}$

$$\mathrm{d}P_{rad} = \frac{1}{c} I \cos^2\theta \, \mathrm{d}\omega, \tag{8.49}$$

de unde

$$P_{rad} = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I \cos^2\theta \, \mathrm{d}\omega \tag{8.50}$$

Pentru corpul negru (a cărui radiație este izotropă), avem

$$P_{rad} = \frac{4\pi I}{3c} = \frac{1}{3} u = \frac{1}{3} aT^4 \tag{8.51}$$

Am definit astfel *presiunea de radiație integrală.* În același mod se poate defini *presiunea de radiație monocromatică*, $P_{rad}(\nu)$, pentru care avem

$$P_{rad}(\nu) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu \cos^2\theta \, d\omega \tag{8.52}$$

și respectiv

$$P_{rad}(\nu) = \frac{4\pi I_\nu}{3c} = \frac{1}{3} u_\nu = \frac{4\pi B_\nu(T)}{3c} \tag{8.53}$$

§ 8.6. FOTOMETRIA ASTRONOMICĂ

Studiul corpurilor cerești pe baza măsurării strălucirii lor aparente formează obiectul fotometriei astronomice. Din strălucirea aparentă (măsurată) a astrului se poate deduce intensitatea radiației emise de astru și luminozitatea lui (monocromatică sau integrală).

După obiectele la care se aplică, deosebim *fotometria punctuală* (sau *stelară*) și *fotometria superficială.* Prima se ocupă cu metodele de măsurare a strălucirii aparente a obiectelor punctuale: asteroizi, stele, quasari etc., iar a doua — cu determinarea strălucirii obiectelor superficiale: Soarele, Luna, cometele, nebuloasele etc. În ambele tipuri de fotometrie, strălucirea aparentă se exprimă într-o scară logaritmică, numită *scara magnitudinilor stelare.*

1°. **Magnitudinea aparentă.** Hiparh (sec. II î.e.n.) a împărțit stelele, după strălucirea lor aparentă, în șase clase de strălucire, pe care le-a numit *magnitudini stelare.* Stelele cele mai strălucitoare le-a considerat de magnitudinea 1 (adică 1^m), iar cele aflate la limita vizibilității (pe cer perfect senin, în nopți fără Lună) — de magnitudinea 6 (adică 6^m). Între acestea a considerat clase intermediare de magnitudini.

Clasificarea lui Hiparh, care s-a păstrat mult timp, fiind extinsă apoi la corpuri mai strălucitoare de 1^m (introducîndu-se și magnitudini negative), ca și la corpuri mai slabe de 6^m, are o bază pur intuitivă (empirică). Împărțirea stelelor în clase, făcîndu-se pe baza senzației luminoase produse de strălucirea lor, are un caracter subiectiv.

Pe la mijlocul secolului al XIX-lea, cînd în fotometria astronomică au început să se răspîndească metodele obiective de măsurare a strălucirii stelelor, s-a dovedit că împărțirea lui Hiparh se poate explica pe baza *legii psihofiziologice a lui Weber—Fechner,* care poate fi formulată astfel: „Variația intensității senzației produse de un excitant fizic este proporțională cu raportul dintre variația intensității excitației și intensitatea excitației inițiale". Să aplicăm această lege în fotometrie.

Fie E strălucirea aparentă a unei stele (E nu este neapărat strălucirea integrală, ci poate fi și o strălucire monocromatică sau una heterocromatică). Fie dE variația strălucirii aparente. Raportului lor dE/E îi va corespunde o variație în magnitudine dm. Conform legii lui Weber—Fechner, avem

$$dm = K \frac{dE}{E} \tag{8.54}$$

unde K este un coeficient de proporționalitate. Prin integrare rezultă

$$m = K \ln E + C, \tag{8.55}$$

unde C este o constantă de integrare. Trecînd de la logaritmii naturali la cei zecimali și notînd $K \ln 10 = \varkappa$, obținem

$$m = \varkappa \lg E + C \tag{8.56}$$

Prin măsurări fotometrice, *Pogson* (1856) a stabilit că raportul strălucirilor aparente (vizuale) a două stele avînd magnitudinile 1, respectiv 6, este aproape 100. Pentru comoditatea calculelor cu magnitudini, el a propus să se ia acest raport riguros egal cu 100, adică $E_{(1)}/E_{(6)} = 100$. Aplicînd relația (8.56), rezultă $\varkappa = -2{,}5$. Deci magnitudinea m se poate calcula din strălucirea aparentă E pe baza relației

$$m = C - 2{,}5 \lg E, \tag{8.57}$$

numită *formula lui Pogson*, unde $\varkappa = -2{,}5$ este factorul de scară (sau constanta de scară) al lui Pogson.

Constanta C din relația (8.57) se numește *constanta de punct nul a sistemului de magnitudini* (variază de la un sistem de magnitudini la altul). Ea se determină prin atribuirea unei anumite magnitudini la o anumită stea de strălucire aparentă cunoscută (în unități energetice).

Pe baza formulei lui Pogson (8.57), s-au introdus și magnitudini intermediare fracționare (Hiparh considerase numai magnitudinile întregi: 1, 2, ..., 6), iar scara magnitudinilor (aparente) s-a extins, fiind în prezent cuprinsă între $-26{,}7$ (Soarele) și $+24$ (stelele cele mai slabe, accesibile marilor telescoape).

Relația lui Pogson se mai poate pune și sub altă formă. Fie două stele de străluciri aparente E și E_0. Fie m, respectiv m_0 magnitudinile corespunzătoare. Scriind relația (8.57) pentru fiecare din cele două stele și scăzînd relațiile obținute, rezultă

$$m - m_0 = -2{,}5 \lg \frac{E}{E_0} \tag{8.58}$$

Întrucît $10^{0{,}4} = 2{,}512\ldots$, ultima relație se mai scrie

$$\frac{E}{E_0} = 10^{0{,}4(m_0 - m)} \simeq 2{,}512^{m_0 - m} \tag{8.59}$$

Formei (8.59) a formulei lui Pogson îi corespunde o a doua formulare a legii lui Weber—Fechner: „La variația în progresie geometrică a intensității excitației corespunde o variație în progresie aritmetică a intensității senzației".

Între strălucirea aparentă E și magnitudinea m avem relația logaritmică (8.57), care se explică prin natura senzației vizuale (relația fiind o exprimare a legii psihofiziologice). Noțiunea de magnitudine s-a extins și pentru cazul receptorilor obiectivi (placa fotografică, fotomultiplicatorul, bolometrul etc.). Deci strălucirea aparentă măsurată cu acești receptori se exprimă de asemenea în scara logaritmică a magnitudinilor, conform formulei lui Pogson (8.57).

Strălucirea aparentă E, care intră în relația (8.57), depinde de distanța r a stelei considerate, conform ecuațiilor (8.23) și (8.24), de aceea magnitudinea corespunzătoare se numește *magnitudine aparentă*.

2°. **Magnitudinea absolută.** Pentru a putea compara radiația emisă de aștri diferiți, se introduce noțiunea de *magnitudine absolută*, aceasta fiind magnitudinea pe care ar avea-o astrul dacă s-ar găsi la distanța standard de 10 parseci. Cu alte cuvinte, magnitudinea absolută este magnitudinea corespunzătoare strălucirii aparente standard a astrului. Să stabilim relația între magnitudinea absolută M și magnitudinea aparentă m ale unui astru (corespunzătoare radiației dintr-un domeniu spectral determinat).

Pe baza relațiilor (8.23) și (8.24), putem scrie

$$E = \frac{R^2}{r^2} H \text{ și } E_{st} = \frac{R^2}{10^2} H,$$

unde r este distanța astrului în parseci. Împărțind cele două relații și ținînd seama de relația (8.59), obținem

$$\frac{E}{E_{st}} = \frac{10^2}{r^2} = 2{,}512^{M-m} \tag{8.60}$$

Logaritmînd relația (8.60) ($\lg 2{,}512 = 0{,}4$), rezultă

$$M = m + 5 - 5 \lg r \tag{8.61}$$

Deoarece $r = 1/\pi''$ parseci, π'' fiind paralaxa anuală a astrului în secunde de arc, relația (8.61) se mai scrie

$$M = m + 5 + 5 \lg \pi \tag{8.62}$$

Din măsurători fotometrice se obține m. Dacă se cunoaște r (sau π) cu relația (8.61) (sau (8.62)) se calculează M. Invers, dacă se cunosc m și M, relația (8.61) permite determinarea distanței astrului; astfel

$$\lg r = 1 + 0{,}2(m - M) \tag{8.63}$$

unde diferența $(m - M)$ se numește *modul de distanță* al astrului considerat.

§ 8.7. SISTEME DE MAGNITUDINI

1°. **Magnitudini monocromatice.** Se utilizează diferite sisteme de magnitudini monocromatice, corespunzătoare strălucirii aparente E_λ care se măsoară. Înainte de a defini magnitudinea monocromatică, trebuie să mai facem cîteva precizări.

Am văzut că strălucirea aparentă specifică (sau monocromatică), E_λ, a unui astru este $E_\lambda = (R^2/r^2)H_\lambda$ (din (8.23)). Aceasta însă nu este o strălucire aparentă efectiv măsurată, ci una extraatmosferică. Pentru a interpreta corect măsurătorile fotometrice, în membrul al doilea al relației anterioare va trebui să introducem următorii factori, care țin seama de faptul că strălucirea efectiv măsurată este mai mică decît cea extraatmosferică:

(1) *Coeficientul de transparență a atmosferei*, p_λ, arată ce fracțiune din strălucirea aparentă a astrului la limita superioară a atmosferei ajunge la observator. El caracterizează absorbția selectivă (dependentă de λ) a atmosferei: $0 \leqslant p_\lambda \leqslant 1$.

(2) *Coeficientul de transparență* (sau *transmisie*) *a aparaturii optice utilizate*, q_λ: $0 \leqslant q_\lambda \leqslant 1$.

(3) *Coeficientul de transparență a filtrelor utilizate*, r_λ: $0 \leqslant r_\lambda \leqslant 1$.

(4) *Coeficientul de sensibilitate a receptorului*, s_λ, arată ce fracțiune din energia incidentă acționează efectiv asupra receptorului, producînd efectul fotometric urmărit: $0 \leqslant s_\lambda \leqslant 1$.

Pentru aștri îndepărtați se ia în considerare și coeficientul de transparență al mediului interstelar (respectiv intergalactic).

Prin urmare, *strălucirea aparentă monocromatică* a astrului, E_λ, va avea expresia

$$E_\lambda = \frac{R^2}{r^2} H_\lambda p_\lambda q_\lambda r_\lambda s_\lambda = \frac{R^2}{r^2} H_\lambda \Phi_\lambda, \tag{8.64}$$

unde s-a notat

$$\Phi_\lambda = p_\lambda q_\lambda r_\lambda s_\lambda; \; 0 \leqslant \Phi_\lambda \leqslant 1 \tag{8.65}$$

Introducînd expresia (8.64) în formula lui Pogson (8.57), obținem *magnitudinea aparentă monocromatică* a astrului, m_λ,

$$m_\lambda = C_\lambda - 2{,}5 \lg \frac{R^2}{r^2} H_\lambda \Phi_\lambda \tag{8.66}$$

corespunzătoare radiației dintr-o anumită lungime de undă λ. În (8.66), C_λ este constanta de punct nul a sistemului de magnitudini monocromatice considerat. Magnitudinea absolută monocromatică, M_λ, se va calcula din m_λ, cu relația (8.62).

Pentru orice lungime de undă λ putem defini un *sistem de magnitudini monocromatice*, care va fi determinat prin constanta C_λ și funcția Φ_λ corespunzătoare.

2°. **Magnitudini heterocromatice.** În practică, este dificil de măsurat strălucirea aparentă într-o lungime de undă (într-un domeniu spectral de lărgime $\Delta\lambda \sim 0{,}1$ nm), exceptînd stelele cele mai strălucitoare. De obicei, măsurătorile se referă la un domeniu spectral destul de larg. Deci se măsoară efectiv o *strălucire aparentă heterocromatică*. Magnitudinea aparentă corespunzătoare se numește *magnitudine aparentă heterocromatică*.

Dacă receptorul este sensibil pentru $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, adică $\Phi_\lambda > 0$ pentru $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ și $\Phi_\lambda = 0$ pentru $\lambda \in [0, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \infty)$, atunci strălucirea aparentă heterocromatică va fi

$$E_{hetero} = \frac{R^2}{r^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} H_\lambda \Phi_\lambda \mathrm{d}\lambda; \; \lambda_1 < \lambda_2; \; \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty), \tag{8.67}$$

iar din (8.57) obținem, pentru *magnitudinea aparentă heterocromatică*, expresia

$$m_{hetero} = C_{hetero} - 2{,}5 \lg \frac{R^2}{r^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} H_\lambda \Phi_\lambda \mathrm{d}\lambda \tag{8.68}$$

Magnitudinea absolută corespunzătoare, numită și ea heterocromatică, se notează cu M_{hetero}.

Dacă în relația (8.68) înlocuim: funcția Φ_λ cu funcțiile corespunzătoare pentru domeniile: vizual, fotografic, fotovizual (domeniu realizat cu plăci fotografice ortocromatice), fotoelectric etc. (adică $\Phi_v(\lambda)$, $\Phi_{pg}(\lambda)$, $\Phi_{pv}(\lambda)$, $\Phi_{pe}(\lambda)$ etc.); lungimile de undă (λ_1, λ_2) — cu $(\lambda_{1v}, \lambda_{2v})$, $(\lambda_{1pg}, \lambda_{2pg})$

etc.; iar constanta C_{hetero} cu C_v, C_{pg} etc.; vom obține sistemele de magnitudini: vizuale (m_v, M_v), fotografice (m_{pg}, M_{pg}), fotovizuale (m_{pv}, M_{pv}), fotoelectrice (m_{pe}, M_{pe}) etc.

În prezent au o largă utilizare magnitudinile heterocromatice fotoelectrice în mai multe culori. Aceasta deoarece efectuînd observații fotometrice în mai multe domenii spectrale (sau în mai multe „culori"), care pot fi separate prin utilizarea unor filtre corespunzătoare, obținem informații despre distribuția energiei în spectrul astrului, spectru ce nu poate fi obținut pentru stele slabe. Unul din cele mai răspîndite sisteme de magnitudini (sau sisteme fotometrice) este sistemul în trei culori al lui Johnson: U (ultraviolet), B (albastru), V (galben).

Magnitudinile heterocromatice pot fi reduse la magnitudini monocromatice prin *relații de echivalență*. În cursul acestei operații de reducere, magnitudinile se corectează și de efectul absorbției atmosferice, al absorbției în aparatura optică etc., obținîndu-se în final magnitudinile extraatmosferice ale aștrilor, care măsoară strălucirea lor aparentă extraatmosferică. În capitolele următoare vom considera că dispunem de asemenea magnitudini extraatmosferice.

3°. **Magnitudini bolometrice.** În cazul observațiilor bolometrice avem: $p_\lambda \equiv 1$ (se efectuează observații extraatmosferice; în cazul observațiilor de la sol, acestea se corectează de efectul absorbției atmosferice), $q_\lambda \equiv 1$ (observații fără aparatură optică), $r_\lambda \equiv 1$ (observații fără filtre), $s_\lambda \equiv 1$ (bolometrul este la fel de sensibil pentru toate radiațiile incidente). Limitele de integrare sînt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$. Punînd $\Phi_\lambda = p_\lambda q_\lambda s_\lambda r_\lambda \equiv 1$, rezultă că strălucirea aparentă bolometrică, E_b, este

$$E_b = \frac{R^2}{r^2} \int_0^\infty H_\lambda d\lambda = \frac{R^2}{r^2} H \equiv E, \tag{8.69}$$

identică cu strălucirea aparentă integrală dată de (8.24). *Magnitudinea aparentă bolometrică*, m_b, va fi dată de relația

$$m_b = C_b - 2{,}5 \lg \frac{R^2}{r^2} H, \tag{8.70}$$

iar magnitudinea absolută bolometrică M_b se obține cu (8.62). Din (8.69) rezultă că magnitudinile bolometrice sînt *magnitudini integrale* (corespunzînd radiației integrale a astrului).

4°. **Indice de culoare.** Diferența dintre magnitudinile unui astru în două domenii spectrale diferite, caracterizate prin lungimile de undă λ_1, λ_2, se numește *indice de culoare*, $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2}; \quad \lambda_1 < \lambda_2 \tag{8.71}$$

Înaintea răspîndirii fotometriei fotoelectrice, cel mai des utilizat era așa numitul *indice de culoare internațional*, $\mathcal{C}_{int} \equiv IC$, dat de

$$IC = m_{pg} - m_{pv} \tag{8.72}$$

În prezent, se răspîndesc tot mai mult indicii de culoare fotoelectrici, de exemplu: $U - B$, $B - V$ etc. Importanța indicilor de culoare constă în faptul că la stelele slabe poate fi, cu ajutorul lor, caracterizat spectrul stelei considerate.

CAPITOLUL IX

APLICAȚII ALE ANALIZEI SPECTRALE ÎN ASTROFIZICĂ

§ 9.1. SPECTRE STELARE

La începutul secolului al XIX-lea, *Fraunhofer* a obținut spectrul Soarelui, în care a pus în evidență o mulțime de linii întunecate (liniile Fraunhofer). Interpretarea fizică a acestor linii și în general a spectrelor s-a făcut mai tîrziu, după dezvoltarea analizei spectrale (începînd cu lucrările lui Kirchhoff și Bunsen, 1858—1859), a fizicii atomice (modelul atomic Bohr—Sommerfeld) și a mecanicii cuantice (undele asociate particulelor: Louis de Broglie, Schrödinger, Dirac etc.).

Analiza spectrală arată că există următoarele tipuri de spectre:

- **Spectre**
  - *de emisie*
    - continue (intensitatea radiației I_λ variază continuu cu λ)
    - discontinue
      - de linii (linii luminoase pe un fond întunecat)
      - de benzi (benzi luminoase pe un fond întunecat)
  - *de absorbție* — pe fondul continuu pot apărea: linii de absorbție, benzi de absorbție și discontinuități spectrale

Spectrele se numesc *atomice* sau *moleculare*, după cum radiațiile electromagnetice respective corespund tranzițiilor electronilor între nivelele energetice ale atomilor sau moleculelor.

Formarea acestor categorii de spectre se explică astfel:

— Corpurile solide, lichide și gazele dense (la presiuni mari), în stare de incandescență, emit spectre continue. Spectrul radiației corpului negru este un spectru continuu.

— Gazele monoatomice rarefiate (inclusiv vaporii atomici) în stare de incandescență emit spectre de linii. Fiecare element chimic emite un spectru de linii caracteristic, care permite identificarea lui.

— Gazele moleculare rarefiate în stare de incandescență, emit, în general, spectre de benzi (emit ansambluri de linii, care de regulă fuzionează în benzi de emisie).

— Dacă radiațiile emise de un corp solid, lichid sau de un gaz dens, în stare de incandescență, trec printr-un gaz aflat la o temperatură mai mică decît corpul care emite, gazul absoarbe acele radiații pe care el le-ar emite în stare de incandescență, în aceleași condiții de temperatură și presiune (legea lui Kirchhoff, consecință directă a legii (8.31)). În acest fel se explică formarea liniilor de absorbție și a benzilor de absorbție în spectrele stelelor, precum și absorbția continuă a radiațiilor cu frecvența peste o anumită frecvență limită. În acele regiuni apar discontinuități în variația lui $\overline{I}_\lambda$ cu λ, care se explică prin procesele de ionizare.

La un spectru stelar se studiază:

— *Spectrul continuu.* Se determină distribuția energiei în spectru (variația intensității $\overline{I}_\lambda$ cu λ), prin măsurători spectrofotometrice. Din relația (8.23) avem

$$E_\lambda = \frac{R^2}{r^2} H_\lambda = \frac{R^2}{r^2} \pi \overline{I}_\lambda \tag{9.1}$$

Măsurînd strălucirea E_λ și cunoscînd raza stelei R și distanța ei r, din ecuația (9.1) obținem pe H_λ sau pe $\overline{I}_\lambda$. Din distribuția energiei în spectru, $\overline{I}_\lambda$ (linia întreruptă în fig. 9.1), se poate determina temperatura stelei, prin compararea cu izotermele teoretice Planck $B_\lambda(T)$ (curbele continue, fig. 9.1). Culoarea stelei este legată de poziția maximului în curba $\overline{I}_\lambda$, conform legii lui Wien

$$\lambda_m T = b \tag{9.2}$$

— *Liniile și benzile de absorbție și de emisie.* La acestea se determină: poziția în spectru (lungimea de undă) — din care rezultă compoziția chimică a stelei (astrului); intensitatea — din care rezultă densitatea substanței care le-a produs și abundența relativă a elementelor chimice; deplasările liniei spectrale — din care rezultă viteza radială a stelei sau prezența unor cîmpuri (magnetic, electric etc.); etc.

— *Discontinuitățile spectrale.* Se determină poziția discontinuității, λ_1, și mărimea discontinuității (saltului), D, unde

$$D = \lg \frac{I_{\lambda_1 +}}{I_{\lambda_1 -}} \tag{9.3}$$

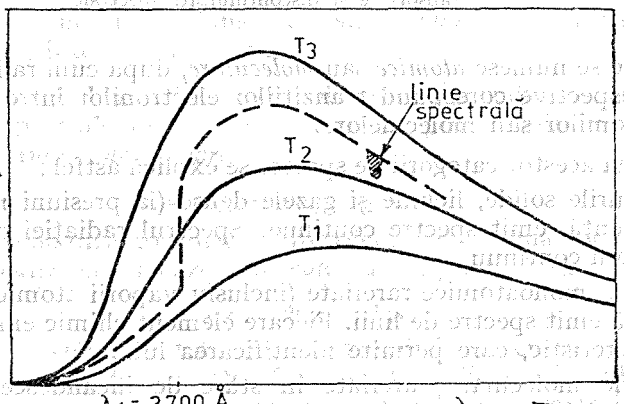


Fig. 9.1. Distribuția energiei în spectrul unei stele, $\overline{I}_\lambda$ și curbele lui Planck.

În spectrul vizibil, cea mai importantă este discontinuitatea Balmer, produsă de absorbția continuă a hidrogenului (la $\lambda_1 \simeq 370$ nm, fig. 9.1).

Datorită prezenței liniilor, benzilor și discontinuităților spectrale, spectrele stelare manifestă abateri importante ale radiației stelei de la legile de radiație ale corpului negru. Astrofizica teoretică explică aceste abateri pe baza rezultatelor fizicii atomice. Înainte de a arăta mecanismul formării spectrelor, vom prezenta o clasificare a lor.

§ 9.2. CLASIFICAREA SPECTRALĂ HARVARD A STELELOR

În majoritatea cazurilor spectrele stelare sînt spectre de absorbție. Fondul continuu se datorește *fotosferei* — stratul cel mai adînc al atmosferei stelare (mai dens și mai fierbinte), de la care primim radiații. Datorită absorbției radiațiilor în straturile superioare ale atmosferei stelare (*cromosfera* — mai rarefiată și mai rece), pe fondul continuu apar linii și benzi de absorbție. În anumite condiții (stele Wolf—Rayet, stele cu învelișuri), pe fondul continuu pot apare linii de emisie.

Există o mare diversitate a spectrelor stelare, care diferă prin distribuția energiei în spectrul continuu, prin numărul, natura și intensitatea liniilor spectrale, și prin discontinuitățile spectrale (în primul rînd poziția λ_1 și mărimea D a discontinuității Balmer). Cu toate acestea, între spectrele diferitelor categorii de stele există anumite asemănări. Măsurîndu-se raportul intensităților anumitor linii spectrale, la Observatorul Harvard (S.U.A) s-a dat (în primele decenii ale secolului nostru) o clasificare empirică a spectrelor stelare. Toate spectrele stelare pot fi așezate în următoarea succesiune (secvență) de *clase (tipuri) spectrale*:

$$W - O - B - A - F - G - \begin{matrix} R - N \\ K \\ S \end{matrix} - M,$$

fiecare clasă fiind împărțită la rîndul ei în subclase: *A0*, *A1*, ..., *A9*; *F0*, ... etc. Această clasificare, care inițial s-a făcut după raportul intensităților anumitor linii spectrale, s-a dovedit ulterior a fi o clasicare după temperatură.

Caracteristicile claselor spectrale sînt date în tabelul 9.1.

Temperaturile date în tabel, ca și indicii de culoare, sînt valori medii pentru clasa respectivă. În interiorul unei clase, temperatura variază de la o subclasă la alta. Pentru aceeași clasă spectrală, stelele gigante au temperaturi mai mici decît stelele pitice. Stelele din clasele *M*, *R*, *N*, *S* au aproximativ aceleași temperaturi, însă diferă prin compoziția chimică.

Clasificarea spectrală Harvard este o clasificare *unidimensională* (după temperatură). Ea nu permite separarea stelelor gigante de cele pitice din aceeași clasă spectrală. Pentru înlăturarea acestui neajuns, s-au propus clasificări spectrale *bidimensionale*. O astfel de clasificare este *clasificarea Morgan-Keenan*. Autorii acestei clasificări au arătat că spectrul depinde de doi parametri: temperatura T și luminozitatea L. La aceeași temperatură, liniile spectrale au o structură diferită la gigante, față de pitice. Astfel, spectrul unei stele este caracterizat atît prin tipul său (clasa spectrală) (*O*, *B*, *A* etc.), cît și prin clasa de luminozitate (de la I la VII, vezi cap. X). De exemplu, Soarele are spectrul *G2V*.

Tabelu 9.1

Caracteristicile claselor spectrale

Clasa spectrală	Temperatura medie (K)	Principalele particularităţi ale spectrului	Indicele de culoare (IC)	Culoarea	Reprezentant
W	50 000—100 000	Linii de emisie He^+, He şi N (sau C şi O)	—	albastră	—
O	35 000	Linii de absorbţie He^+, He şi H şi ale atomilor ionizaţi de C, Si, N, O	—0,3	albastră deschisă	—
B	17 000	Liniile He (neutru) ating cea mai mare intensitate	—0,2	albă-albastră	Spica (α Vir)
A	10 000	Liniile H ating cea mai mare intensitate	0,0	albă	Vega (α Lyr) Sirius (α CMa)
F	8 000	Liniile H slăbesc, liniile Ca^+ şi metalice devin intense	0,4	albă-galbenă	Procyon (α CMi)
G	6 000	Liniile metalelor sînt intense (Ca^+, Fe, ş.a.)	0,6	galbenă	Soarele Capella (α Aur)
K	4 500	Liniile metalelor sînt foarte intense. Apar benzi moleculare	1,0	portocalie	Arcturus (α Boo) Aldebaran (α Tau)
M	3 300	Benzi intense de absorbţie ale combinaţiilor moleculare (mai ales Ti O)	1,5	roşie	Betelgeuse (α Ori)
R, N	3 300	Benzile moleculare de absorbţie C_2 (şi combinaţiile CO, CN) în loc de Ti O	1,5	roşie	—
S	3 300	Benzi de absorbţie Zr O	1,5	roşie	—

O altă clasificare bidimensională a fost propusă de Barbier şi Chalonge, care iau ca parametri: $\lambda_{1\ Balmer}$, D_{Balmer}, care variază cu tipul spectral şi clasa de luminozitate.

Chalonge a propus şi o *clasificare tridimensională*, introducînd ca al treilea parametru *gradientul spectrofotometric absolut* în albastru, Φ_b, unde

$$\Phi_\lambda = \frac{c_2}{T}(1 - e^{c_2/\lambda T})^{-1} \qquad (9.4)$$

şi unde $c_2 = hc/k$, $\Phi_b \equiv \Phi_{\lambda b}$, $\lambda = \lambda_b$ fiind o valoare medie a lungimii de undă pentru domeniul albastru al spectrului. În spaţiul $\lambda_{1\ Balmer}$, D_{Balmer}, Φ_b, mulţimea spectrelor stelare formează o suprafaţă.

La stelele slabe la care nu putem obţine spectrul, unele indicaţii asupra naturii sale ne furnizează indicele de culoare *IC*. Prin utilizarea mai multor indici de culoare (obţinuţi prin fotometrie fotoelectrică multicoloră, de exemplu $U-B$, $B-V$), este posibilă chiar separarea gigantelor de pitice.

Modul de formare a spectrelor stelare se poate explica utilizînd rezultatele fizicii atomice. Aceasta arată că atomul se găseşte întotdeauna într-o stare energetică cuantificată.

Considerînd cazul cel mai simplu al atomului de hidrogen, înseamnă că electronul nu poate ocupa orice stare faţă de nucleu, ci numai stări energetice determinate (stări discrete — cuantificate) — numite *nivele energetice*. Notînd cu $\mathcal{E}$ energia unui nivel, $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(n)$, unde n este un număr natural, numit număr cuantic principal. Conform teoriei lui Bohr—Sommerfeld

$$\mathcal{E}(n) = -\frac{m_e Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9.5}$$

unde m_e este masa electronului, e — sarcina electronului, Z — numărul atomic (de ordine) al elementului chimic (pentru hidrogen, $Z = 1$), iar ε_0 este permitivitatea vidului. Energia electronului *legat* de nucleu este negativă, luîndu-se ca origine a energiei ($\mathcal{E}(\infty) = 0$) energia minimă la care electronul se desprinde de nucleu prin ionizare.

În mod obişnuit, electronul ocupă nivelul energetic cel mai scăzut (energia minimă $\mathcal{E}(1)$). Spunem că atomul este în *starea fundamentală*. Prin *ciocniri* între atomi sau *absorbţie* de radiaţie, electronul poate trece pe un nivel energetic superior $\mathcal{E}(n)$, $n > 1$ (fig. 9.2). Spunem că atomul este *excitat*. În general, starea excitată a atomului este instabilă. Atomul poate rămîne într-o stare excitată un timp de ordinul 10^{-8} secunde, după care electronul trece spontan la un nivel energetic inferior, revenind (direct sau prin treceri intermediare) la nivelul fundamental. Acest proces se numeşte *dezexcitare*. Prin nivel n se înţelege nivelul energetic $\mathcal{E}(n)$. Trecerea electronului de la un nivel n la un alt nivel n' se numeşte *tranziţie*.

Dacă $n' > n$, tranziţia se realizează prin absorbţie de radiaţie electromagnetică, sub forma unor cuante a căror energie $h\nu_{n,n'}$ (respectiv frecvenţă $\nu_{n,n'}$) este dată de relaţia

$$h\nu_{n,n'} = \mathcal{E}(n') - \mathcal{E}(n) = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \tag{9.6}$$

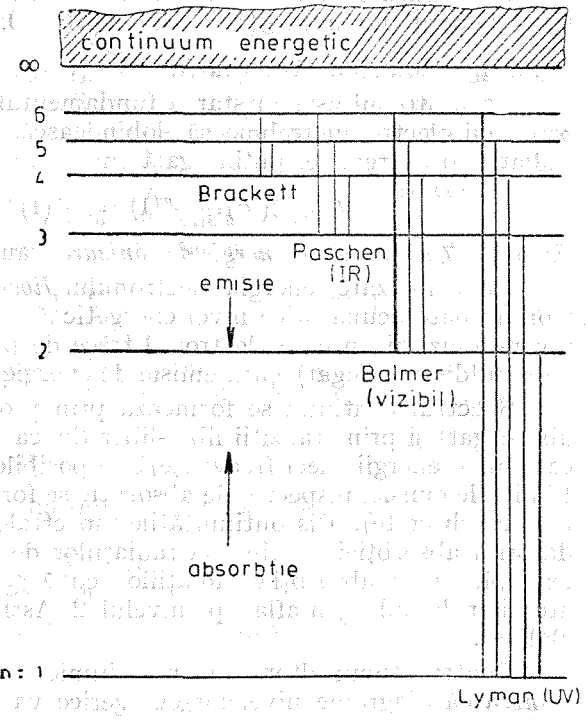


Fig. 9.2. Spectrul energetic al atomului de hidrogen.

Ţinînd seama de relaţia $\nu = c/\lambda$, obţinem pentru lungimea de undă a radiaţiei absorbite relaţia

$$\tilde{\nu}_{n,n'} \equiv \frac{1}{\lambda_{n,n'}} = \mathcal{R}_v \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right), \quad n' > n, \tag{9.7}$$

unde

$$\mathcal{R}_v = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \tag{9.8}$$

este constanta lui Rydberg. Mărimea $\tilde{\nu}$ se numeşte număr de undă al radiaţiei.

Relaţia (9.7) este *formula lui Balmer generalizată*. Dacă aici $n = 1$ şi $n' = 2, 3, 4, \ldots$, se obţine seria Lyman de linii spectrale de absorbţie — în ultraviolet (fig. 9.2). Dacă $n = 2$ şi $n' = 3, 4, \ldots$, se obţine seria Balmer de linii spectrale de absorbţie, care se observă în domeniul vizibil, în spectrul Soarelui şi în spectrele stelelor. În continuare avem seriile Paschen (în infraroşu), Brackett etc.

Dacă $n' < n$, în urma tranziţiei se produce *emisie* de radiaţie, în cuante de energie $h\nu_{n,n'}$, dată de

$$h\nu_{n,n'} = \mathcal{E}(n) - \mathcal{E}(n'), \tag{9.9}$$

obţinîndu-se linii spectrale de emisie. Analog, ca înainte, avem seriile Lyman, Balmer etc. de linii spectrale de emisie.

Pe măsură ce n creşte, nivelele energetice devin tot mai apropiate, iar nivelul energetic limită $\mathcal{E}(\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(n) = 0$, corespunde eliberării electronului din atom, adică *ionizării*.

Dacă atomul este în starea fundamentală ($n = 1$), atunci pentru ionizarea lui electronul trebuie să dobîndească (prin ciocniri sau absorbţie de radiaţie) o energie cel puţin egală cu

$$\chi = \mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(1) = |\mathcal{E}(1)| \simeq 13{,}5 \text{ eV} \tag{9.10}$$

Energia χ se numeşte *energie de ionizare* (sau *potenţial de ionizare*).

După ionizare, energia electronului *liber* variază continuu, adică electronul poate ocupa orice nivel energetic $\mathcal{E} > \mathcal{E}(\infty)$ faţă de nucleu. Procesul invers ionizării, în care electronul trece de pe un nivel continuu de energie pe unul discret (legat), prin emisie de energie, se numeşte *recombinare*.

Spectrul continuu se formează prin procese de recombinare (tranziţii liber-legat) şi prin tranziţii liber-liber (în care $\mathcal{E}$ variază continuu), pentru care orice energii (deci frecvenţe) sînt posibile, iar acestea variază continuu. Liniile de emisie, respectiv de absorbţie se formează prin tranziţii legat-legat (nivele discrete). Discontinuităţile spectrale se formează prin ionizare, datorită absorbţiei continue a radiaţiilor de la limita seriilor spectrale. De exemplu, prin absorbţia radiaţiilor cu $\lambda \lesssim 370$ nm se produce ionizarea atomilor de hidrogen aflaţi pe nivelul 2. Astfel se formează discontinuitatea Balmer.

Pentru atomii altor elemente chimice au loc procese analoge, cu deosebirea că diagrama nivelelor energetice va fi mult mai complicată, avînd mai mulţi electroni. Energia $\mathcal{E}$ este cuantificată după mai multe numere

cuantice, iar nivelele energetice se „despică" în subnivele. Şi mai complicat este spectrul energetic pentru molecule, la care fiecare nivel energetic se poate despica în foarte multe subnivele apropiate (chiar o infinitate). În spectrul stelei, liniile corespunzătoare acestor subnivele fuzionează în benzi (de absorbţie sau de emisie).

§ 9.4. LEGEA LUI BOLTZMANN ŞI LEGEA LUI SAHA

Spectrul continuu poate fi descris cantitativ, în prima aproximaţie (pentru stele nu prea fierbinţi), cu ajutorul legii lui Planck: $\bar{I}_\lambda = B_\lambda(T)$. Liniile spectrale pot fi descrise cantitativ cu ajutorul legilor lui Boltzmann şi Saha. Intesităţile lor depind de numărul atomilor care contribuie la formarea acestor linii, adică de numărul relativ al atomilor pe diferite nivele de excitare şi pe diferite stadii de ionizare. Legile lui Boltzmann şi Saha dau tocmai aceste distribuţii relative.

Fie N_A — numărul de atomi ai unui element chimic, pe unitatea de volum, aflaţi pe nivelul A cu energia $\mathcal{E}_A$, şi N_B — numărul corespunzător nivelului B cu energia $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$. Cum s-a arătat înainte, energiile $\mathcal{E}_A$ şi $\mathcal{E}_B$ sînt cuantificate (în general după mai multe numere cuantice). Fie $\chi_{AB} = \mathcal{E}_B - \mathcal{E}_A$ — diferenţa energiilor celor două nivele. Dacă A este nivelul fundamental, energia χ_{AB} se numeşte *energie de excitare* sau *potenţial de excitare* al nivelului B.

Boltzmann arată că în *echilibru termodinamic** este valabilă relaţia

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{g_B}{g_A} e^{-\chi_{AB}/kT}, \tag{9.11}$$

unde g_A şi g_B sînt ponderile statistice ale nivelelor corespunzătoare. Din formula (9.11) rezultă că odată cu creşterea temperaturii creşte numărul de atomi pe nivelele energetice superioare. Dacă T creşte suficient de mult, atunci unii electroni părăsesc atomii, avînd loc *procesul de ionizare*.

Fie N_q — numărul de atomi ai unui element chimic, pe unitatea de volum, care se găsesc în stadiul q de ionizare ($q = 0$ — atomi neutri, $q = 1$ — atomi odată ionizaţi etc.). Fie χ_q energia necesară trecerii de la stadiul de ionizare q la $q + 1$ — adică *potenţialul de ionizare al stadiului* q.

Saha arată că în condiţii de echilibru termodinamic este valabilă relaţia

$$\frac{N_{q+1}}{N_q} P_e = \frac{(2\pi m_e)^{3/2}(kT)^{5/2}}{h^3} \cdot 2\frac{B_{q+1}(T)}{B_q(T)} e^{-\chi_q/kT}; \quad q = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9.12}$$

unde, pe lîngă mărimile amintite şi cele cu semnificaţie deja cunoscută, mai intră: P_e — presiunea electronică, dată în funcţie de numărul electronilor pe unitatea de volum, N_e, prin relaţia

$$P_e = N_e kT \tag{9.13}$$

şi $B_q(T)$ — suma stărilor atomului de q ori ionizat, dată de

$$B_q(T) = \sum_{r=0}^{\infty} g_{q,r} e^{-\chi_{q,r}/kT}, \tag{9.14}$$

unde $g_{q,r}$ este ponderea statistică, iar $\chi_{q,r}$ — potenţialul de excitare pentru nivelul r al atomului de q ori ionizat.

* Echilibrul termodinamic implică: echilibrul termic (T = const.) şi echilibrul statistic (N_A, N_B sînt statistic constante).

Deoarece $B_{q+1}(T)/B_q(T)$ variază lent cu T, formula (9.12) arată că gradulde ionizare creşte cu temperatura, această creştere fiind puţin frînată de presiunea electronică, P_e.

Formulele (9.11) şi (9.12) permit calculul intensităţii liniilor spectrale şi determinarea abundenţei elementelor chimice în atmosfera stelei.

Interpretarea riguroasă a spectrului stelar cere utilizarea unor modele de atmosferă stelară, fapt care permite determinarea intensităţii în spectrul continuu, calculul discontinuităţilor spectrale şi al profilelor liniilor spectrale.

§ 9.5. DEPLASAREA LINIILOR SPECTRALE

Comparînd spectrul unui astru cu spectrul unei surse terestre (fixe), se constată anumite deplasări ale liniilor spectrale ale astrului, deplasări care pot avea diferite cauze. Astfel, avem:

(1) *Efectul Doppler.* Dacă astrul se deplasează faţă de observator cu viteza radială v_r (proiecţia vitezei sale pe raza vizuală), atunci liniile spectrale suferă o deplasare $\Delta\lambda$, dată de relaţia

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{v_r}{c}, \tag{9.15}$$

unde $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, λ' fiind lungimea de undă a liniei spectrale în spectrul astrului, iar λ — lungimea corespunzătoare pentru sursa terestră. Dacă $\Delta\lambda > 0$ (deplasare spre roşu), astrul se îndepărtează de observator ($v_r > 0$), dacă $\Delta\lambda < 0$ (deplasare spre violet), astrul se apropie de observator ($v_r < 0$). Măsurînd deplasarea $\Delta\lambda$, cu formula (9.15) se poate calcula viteza radială a astrului.

Pe baza efectului Doppler observat în spectrele galaxiilor s-a dezvoltat teoria *expansiunii Universului.*

(2) *Efectul Zeeman.* Constă în despicarea şi deplasarea liniilor spectrale în cîmp magnetic. Deplasarea este proporţională cu intensitatea cîmpului magnetic, fiind adesea însoţită de polarizarea luminii. Permite determinarea cîmpului magnetic.

(3) *Efectul Stark.* Constă în despicarea şi deplasarea liniilor spectrale în cîmp electric, deplasarea fiind proporţională cu intensitatea cîmpului electric, care rezultă din mărimea deplasării.

(4) *Efectul Einstein.* Constă în deplasarea liniilor spectrale într-un cîmp gravific intens. Mărimea deplasării, $\Delta\lambda$, este dată de

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{G\mathcal{M}}{c^2 R}, \tag{9.16}$$

unde $\mathcal{M}$ este masa corpului care produce cîmpul gravific intens, iar R este raza lui. Măsurînd pe $\Delta\lambda$ şi cunoscînd pe R, se poate determina masa $\mathcal{M}$. Este dificil de separat de efectul Doppler.

CAPITOLUL X

PARAMETRII DE STARE AI STELELOR. RELAȚII DE STARE

§ 10.1. PARAMETRII DE STARE

Proprietățile stelelor pot fi caracterizate cu ajutorul unor parametri, care permit să le deosebim de alte corpuri cerești, numiți *parametri de stare* sau *parametri fizici* ai stelelor.

Principalii parametri de stare sînt următorii:

(1) *Masa stelei*, $\mathcal{M}$, exprimată de obicei în mase solare ($\mathcal{M}_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg).

(2) *Compoziția chimică a stelei*, determinată prin proporția pe unitate de masă a hidrogenului, X; a heliului, Y; și a celorlalte elemente chimice, $Z = 1 - X - Y$. Pentru atmosfera stelei, compoziția chimică se determină din spectru, pentru interior — se deduce teoretic din modelele de structură stelară.

(3) *Raza stelei*, R, exprimată de obicei în raze solare ($R_\odot = 6{,}960 \cdot 10^8$ m).

(4) *Luminozitatea stelei*, L (luminozitatea integrală sau bolometrică este cantitatea totală de energie emisă de stea în unitatea de timp sau fluxul integral total, dat de relația (8.18)), exprimată în luminozități solare sau în W ($L_\odot = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ W).

(5) *Temperatura efectivă a stelei*, T_e, este temperatura unui corp negru care ar emite aceeași cantitate de energie (integrală) pe unitatea de arie, în unitatea de timp, ca și unitatea de arie a stelei în unitatea de timp (temperatura unui corp negru care ar emite același flux integral H). Se măsoară în grade absolute (Kelvin; 0°C = 273,16 K).

Aproximînd steaua printr-un corp negru, înseamnă că putem aplica legea lui Stefan—Boltzmann (8.38)

$$H = \pi \bar{I} \equiv \pi B = \sigma T^4 \equiv \sigma T_e^4 \tag{10.1}$$

Deci între L, R și T_e avem relația de definiție

$$L \equiv 4\pi R^2 H = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \tag{10.2}$$

(6) *Spectrul stelei*, determinat pe baza unei clasificări spectrale empirice. Cea mai răspîndită este clasificarea amintită a lui Morgan-Keenan, în care un spectru este caracterizat prin tipul său (conform clasificării Harvard) și prin clasa de luminozitate. De exemplu, Soarele are în această clasificare spectrul *G*2V.

(7) *Densitatea medie a stelei*, $\bar{\rho}$, exprimată în kg/m³, rezultă din relația de definiție

$$\bar{\rho} = \frac{3\mathcal{M}}{4\pi R^3} \tag{10.3}$$

Pentru Soare avem $\bar{\rho}_\odot = 1410$ kg/m³.

(8) *Accelerația gravitațională la suprafața stelei*, g, măsurată în m/s², rezultă din relația de definiție

$$g = \frac{G\mathcal{M}}{R^2} \tag{10.4}$$

La suprafața Soarelui, $g_\odot = 274$ m/s².

(9) *Producția medie de energie a stelei*, $\bar{\varepsilon}$, pe unitate de masă, pe secundă, definită prin relația

$$\bar{\varepsilon} = L/\mathcal{M} \tag{10.5}$$

Pentru Soare, $\bar{\varepsilon}_\odot \simeq 2 \cdot 10^{-4}$ J · kg^{-1}s^{-1}

(10) *Rotația stelei*, determinată prin perioada de rotație, P_{rot}, exprimată în zile medii. $P_{rot\,\odot} = 25{,}38$ z.m. (la latitudinea de 16°).

Una din problemele importante ale astrofizicii este determinarea parametrilor de stare ai stelelor enumerați mai sus.

Între unii parametri de stare avem relații de definiție, cum sînt relațiile (10.2) — (10.5). De asemenea, între parametrii de stare există anumite relații, deduse din observații, numite *relații de stare*. Pe de altă parte, pentru studiul structurii și evoluției stelei, nu toți parametrii de stare joacă același rol. Astfel, din cei zece parametri de stare amintiți mai sus, *parametrii de stare fundamentali* sînt: masa, compoziția chimică, raza și luminozitatea. Deoarece observațiile pun în evidență relațiile de stare: masă-luminozitate și masă rază (v. § 10.6), înseamnă că *parametrii de stare determinanți pentru stea* sînt *masa* și *compoziția chimică*, în conformitate cu teorema lui Vogt-Russell asupra structurii interne a stelelor.

Deducerea din observații a relațiilor de stare și explicarea teoretică a acestor relații sînt două din problemele fundamentale ale astrofizicii. Înainte de a le prezenta, să vedem cum se determină parametrii de stare din observații.

§ 10.2. DETERMINAREA MASELOR STELARE

Valori precise pentru masele stelare ne furnizează stelele duble, *pe baza legii a III-a a lui Kepler* (exacte) (o stea dublă este un sistem format din două stele suficient de apropiate pentru a interacționa gravitațional, evidențiindu-se o mișcare orbitală — absolută sau relativă — a componentelor).

Aplicată pentru două sisteme de cîte două corpuri, legea a III-a a lui Kepler (exactă) se scrie astfel

$$\frac{P^2(\mathcal{M}+m)}{a^3} = \frac{P'^2(\mathcal{M}'+m')}{a'^3} \tag{10.6}$$

Fie sistemul format din cele două stele — primul sistem și sistemul Soare—Pămînt — al doilea sistem. Să notăm $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$, $m = \mathcal{M}_2$ — masele componentelor sistemului dublu, P — perioada de revoluție sideral, iar a — semiaxa mare a orbitei relative corespunzătoare. Să luăm următorul sistem de unități: $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_\odot = 1$ — unitatea de masă ($m' = m_\oplus$ — se poate neglija față de $\mathcal{M}_\odot = 1$); $P' = 1$ an sideral — unitatea de timp; și $a' = 1$ UA — unitatea de distanță. Atunci din ecuația (10.6) rezultă

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \frac{a^3}{P^2} \tag{10.7}$$

Semiaxa orbitei, a, se poate determina, la stele duble vizuale, cunoscînd (din observații) semiaxa unghiulară a orbitei, a'', și paralaxa stelei duble, π''. Avem

$$a = r \operatorname{tg} a'' = r \frac{a''}{206\,265''} \tag{10.8}$$

dar

$$r = \frac{206\,265''}{\pi''} \text{ UA} \tag{10.9}$$

Din (10.8) și (10.9) rezultă

$$a = \frac{a''}{\pi''} \text{ UA} \tag{10.10}$$

iar ecuația (10.7) devine

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \frac{a''^3}{\pi''^3 P^2} \tag{10.11}$$

Formula (10.11) ne dă suma maselor componentelor, în mase solare. Pentru a determina masele lor individuale, este necesară încă o relație. Dacă se cunoaște poziția centrului de masă (distanțele a_1, a_2 ale componentelor față de acesta), atunci

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} = \frac{a_2}{a_1}, \quad (a_1 + a_2 = a) \tag{10.12}$$

Cu ecuațiile (10.11), (10.12) se determină masele stelelor duble vizuale. La stelele duble spectroscopice, masele rezultă din curbele vitezelor radiale (dacă dispunem și de observații fotometrice, adică dacă stelele sînt și duble fotometrice).

La unele stele simple, masele se pot determina *pe baza efectului Einstein*, de deplasare spre roșu a liniilor spectrale, datorită unui cîmp gravific intens, conform relației (9.16):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{G\mathcal{M}}{c^2 R} = 2{,}12 \cdot 10^{-6} \frac{\mathcal{M}}{R} \tag{10.13}$$

Ultima egalitate este valabilă dacă se utilizează un sistem solar de unități ($\mathcal{M}_\odot = 1$, $R_\odot = 1$). Efectul este sensibil la stele cu mase mari (stele supermasive) și la stelele cu raze mici (pitice albe).

Pe cale astrometrică și aplicînd metoda perturbațiilor, la unele stele s-au pus în evidență „sateliți invizibili" — corpuri care sînt la limita dintre stele și planete (avînd mase de la cîteva miimi, la cîteva sutimi de masă solară). Astfel, stelele Barnard, 61 Cygni ș.a. au „sateliți" comparabili cu planeta Jupiter, adică au sisteme planetare comparabile cu al nostru.

Masele stelelor variază între cîteva sutimi de masă solară și 50 mase solare.

§ 10.3. DETERMINAREA TEMPERATURILOR STELARE

Ne vom opri mai întîi la determinarea temperaturii unei stele, deoarece aceasta se obține relativ mai ușor (direct) din observații decît raza și luminozitatea de care este legată prin (10.2). O primă aproximație pentru temperatură rezultă din tipul spectral al stelei (de fapt tipul spectral dă temperatura de ionizare, care însă este corelată cu temperatura efectivă).

În general, temperaturile stelelor se determină, în primă aproximație, *aplicînd legile de radiație ale corpului negru* (determinarea exactă a temperaturii și distribuției ei cu adîncimea implică construirea unui model de atmosferă stelară). Există diferite metode de determinare a temperaturii unei stele, care, însă, aplicate la aceeași stea, dau rezultate diferite, din două motive:

— stelele se abat de la legile de radiație ale corpului negru, care sînt valabile (strict vorbind) în condiții de echilibru termodinamic;

— temperatura unei stele variază cu adîncimea, iar rezultatele obținute vor depinde de adîncimea la care se referă radiațiile înregistrate (straturile atmosferei stelare sînt semitransparente).

1°. **Determinarea temperaturii efective.** Din definiția ei, rezultă că temperatura efectivă se poate determina cunoscînd fluxul integral H emis de unitatea de arie a stelei. Acesta nu se poate măsura direct; se poate măsura, însă, cu bolometrul, strălucirea aparentă integrală a stelei, E. Din relația (8.24) avem

$$E = \frac{R^2}{r^2} H = \frac{L}{4\pi r^2} \tag{10.14}$$

Înlocuind pe H cu σT_e^4, conform legii lui Stefan-Boltzmann (10.1), obținem

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{r^2 E}{R^2 \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{E}{\sigma \sin^2 (d/2)}} \tag{10.15}$$

unde

$$\sin (d/2) = \frac{R}{r}, \tag{10.16}$$

$d/2$ fiind semidiametrul aparent al stelei (diametrul aparent al stelei, d, este unghiul sub care observatorul vede diametrul ei liniar). Măsurînd pe E și cunoscînd pe r și R (sau d), cu formula (10.15) se determină temperatura efectivă a stelei. Sînt puține stele la care se poate măsura E cu bolometrul, iar d — interferometric (cîteva gigante: Antares, Betelgeuse ș.a.).

Ca o aplicație la formula (10.15), vom determina temperatura efectivă a Soarelui. În acest scop vom defini mai întîi constanta solară. Se numește *constantă solară* — cantitatea de energie solară (integrală) care cade pe aria de 1 cm², așezată perpendicular pe direcția razelor solare, la distanța de 1 UA de Soare, în afara atmosferei terestre, în timp de 1 minut.

Măsurătorile efectuate cu aparate instalate în rachete stratosferice, sateliți artificiali, rachete cosmice (anume: bolometre, pirheliometre etc.), dau pentru constanta solară, S, valoarea

$$S = 1{,}95 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{minut}, \tag{10.17}$$

apropiată de cea obținută de Abbot din măsurători de la sol, la începutul secolului XX. Constanta solară, S, este legată de strălucirea aparentă integrală, E, prin relația

$$E = 10^4 \frac{jS}{60}, \text{ unde } j = 4{,}18 \text{ J/cal} \tag{10.18}$$

este echivalentul mecanic al caloriei. Din (10.17) și (10.18) rezultă

$$E_\odot = 1{,}36 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 \tag{10.19}$$

Introducînd în (10.15) valoarea obținută pentru $E_\odot$ și $r_\odot = 1$ UA $= 149{,}6 \cdot 10^6$km, $R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^5$km, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$W/m² K⁴, rezultă $T_\odot = 5\,770$ K. Punînd valoarea lui $E_\odot$ în (10.14), rezultă

$$H_\odot = 6{,}3 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2, \; L_\odot = 3{,}83 \cdot 10^{26} \text{W} \tag{10.20}$$

2°. **Alte metode de determinare a temperaturii stelelor.** Temperaturile stelelor se mai pot determina:

— Prin compararea distribuției energiei în spectrul continuu cu izotermele teoretice ale lui Planck (fig. 9.1).

— Prin determinarea poziției maximului în această distribuție, cu formula lui Wien: $\lambda_m T = b$.

— Prin măsurarea strălucirii aparente într-un anumit domeniu spectral și aplicarea legii lui Planck:

$$E_\lambda = \frac{R^2}{r^2} \pi \bar{I}_\lambda = \frac{R^2}{r^2} \pi B_\lambda(T) = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1} \tag{10.21}$$

În (10.21), se măsoară E_λ și, cunoscînd celelalte mărimi, rezultă T. Dacă măsurarea se efectuează într-un domeniu îngust (într-o anumită lungime de undă), obținem *temperatura monocromatică* a stelei. Dacă domeniul este mai larg, relația (10.21) se integrează pe domeniul respectiv și obținem *temperatura de radiație.*

— Prin determinarea distribuției relative a energiei în două domenii apropiate ale spectrului. De exemplu domeniile fotovizual și fotografic, aceasta revine la determinarea raportului E_{pv}/E_{pg}, adică la determinarea indicelui de culoare $IC = m_{pg} - m_{pv}$. Dar se poate arăta că $IC = f(T)$, expresia funcției f deducîndu-se teoretic și/sau din observații (empiric). Temperatura astfel determinată se numește *temperatură de culoare.*

— Prin măsurarea intensității unor linii spectrale și utilizarea legii lui Boltzmann *(temperatura de excitare)* și Saha *(temperatura de ionizare).*

Astrofizicii teoretice îi revine sacrina de a stabili relații între aceste diferite tipuri de temperaturi, și temperatura efectivă — care caracterizează radiația globală a stelei.

Temperatura stelelor variază între 2 000 K și 100 000 K.

Cunoscînd diametrul aparent al stelei (definit în § 10.3 şi măsurat cu ajutorul interferometrului), precum şi paralaxa stelei π'' se poate determina raza ei, R. Punînd în relaţia (10.16) $r = (206\,265''/\pi'')$UA şi sin $(d/2) \simeq$ $\simeq d/2 = d''/(2 \cdot 206\,265'')$ (d — fiind mic), rezultă

$$R = \frac{d''}{2\pi''} \text{ UA} \tag{10.22}$$

Numai pentru puţine stele se poate determina R în mod direct, cu formula (10.22) (cele pentru care d'' se poate măsura cu interferometrul). Pentru celelalte stele se aplică metode indirecte de determinare a razei.

Astfel, dacă se cunoaşte luminozitatea integrală a stelei (sau magnitudinea absolută bolometrică) şi temperatura ei efectivă, din (10.2) rezultă raza stelei, R. Să scriem relaţia (10.2) pentru steaua considerată şi pentru Soare. Avem

$$L_b \equiv L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4, \quad L_{b\odot} = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_{e\odot}^4 \tag{10.23}$$

Ţinînd seama de definiţia strălucirii standard intergrale şi aplicînd formula lui Pogson, avem

$$\frac{E_{st}}{E_{st\odot}} = \frac{L_b}{L_{b\odot}} = 2{,}512^{M_{b\odot} - M_b}, \tag{10.24}$$

unde M_b, $M_{b\odot}$ sînt magnitudinile absolute bolometrice ale stelei, respectiv Soarelui. Dar din (10.23) obţinem

$$\frac{L_b}{L_{b\odot}} = \frac{R^2}{R_\odot^2} \cdot \frac{T_e^4}{T_{e\odot}^4} \tag{10.25}$$

Din relaţiile (10.24) şi (10.25) rezultă

$$2{,}512^{M_{b\odot} - M_b} = \frac{R^2}{R_\odot^2} \cdot \frac{T_e^4}{T_{e\odot}^4} \tag{10.26}$$

Logaritmînd relaţia (10.26), obţinem

$$M_b = M_{b\odot} - 5 \lg \frac{R}{R_\odot} - 10 \lg \frac{T_e}{T_{e\odot}} \tag{10.27}$$

Introducînd în (10.27) valoarea cunoscută pentru $T_{e\odot}$, valoarea $M_{b\odot} =$ $= 4{,}7$ şi punînd $R_\odot = 1$, rezultă

$$M_b = 42{,}3 - 5 \lg R - 10 \lg T_e, \tag{10.28}$$

unde R se exprimă în raze solare, iar T_e în grade Kelvin. Din relaţia (10.28) se poate determina una din mărimile M_b, R, T_e, dacă celelalte două sînt cunoscute. În particular se poate determina raza stelei, cunoscînd pe T_e şi M_b.

Aplicarea relaţiei (10.28) pentru determinarea lui R implică efectuarea unor măsurări bolometrice. Raza stelei se poate determina şi din măsurări fotometrice într-un anumit domeniu spectral. În relaţia (10.21) să luăm

pentru $B_\lambda(T)$ aproximația lui Wien (8.40) la legea lui Planck. Atunci, din formula magnitudinii aparente monocromatice (extraatmosferice)

$$m_\lambda = C_\lambda - 2{,}5 \lg E_\lambda \tag{10.29}$$

obținem

$$m_\lambda = C'_\lambda - 5 \lg R + 5 \lg r + \left(2{,}5 \frac{hc}{k} \lg e\right) \cdot \frac{1}{\lambda T}, \tag{10.30}$$

unde am inclus în C'_λ termenii care nu depind de R, r și T. Trecînd la magnitudinea absolută monocromatică, cu relația

$$M_\lambda = m_\lambda + 5 - 5 \lg r, \tag{10.31}$$

notînd $C'_\lambda + 5 = \mathcal{C}_\lambda$ și observînd că $2{,}5(hc/k) \lg e = 1{,}56$, obținem

$$M_\lambda = \mathcal{C}_\lambda - 5 \lg R + \frac{1{,}56}{\lambda T} \tag{10.32}$$

Constanta $\mathcal{C}_\lambda$ se determină din condiția ca relația să fie valabilă pentru Soare, pentru care se cunoaște din observații magnitudinea absolută monocromatică (în lungimea de undă λ) și temperatura monocromatică corespunzătoare, $T_\odot \equiv T_{\lambda\odot}$.

Formula (10.32) se poate aplica și în cazul observațiilor fotometrice heterocromatice, dacă se înlocuiește λ cu o lungime de undă medie echivalentă, iar T cu temperatura de radiație corespunzătoare. De exemplu, pentru domeniul vizual avem: $M_{v\odot} = 4{,}73$; $T_{v\odot} = 6000$ K; $\lambda_{vis} = 529$ nm; de unde rezultă $\mathcal{C}_v = -0{,}18$ și formula (10.32) devine

$$M_v = -0{,}18 - 5 \lg R + \frac{29\,500}{T_v} \tag{10.33}$$

Formula (10.33) permite calculul razei stelei, cunoscînd magnitudinea ei absolută vizuală, precum și temperatura ei de radiație în domeniul vizual.

Mai există și alte metode de determinare a razelor stelare. De exemplu, la stelele binare strînse razele componentelor se pot deduce din analiza curbei de lumină și a curbei vitezelor radiale.

Razele stelare variază între cîteva miimi de rază solară și cîteva mii de raze solare (lăsînd la o parte pulsarii, care au raze de ordinul a 10 km și găurile negre, care au raze sub raza Schwarzschild).

§ 10.5. DETERMINAREA LUMINOZITĂȚII STELELOR

Luminozitatea integrală a stelei se poate calcula cu formula de definiție (10.2), dacă se cunosc, din observații, raza R și temperatura efectivă T_e. În cazul cînd se cunoaște magnitudinea absolută bolometrică, M_b, a stelei, luminozitatea ei rezultă din (10.24).

Dacă se cunosc R și T_e, magnetudinea M_b rezultă din (10.28), iar relația (10.24) este echivalentă cu (10.2). Dar, în general R și T_e nu se cunosc (determinarea directă a lui R este, cum s-a văzut, dificilă). De aceea, la determinarea luminozității stelelor se utilizează metode indirecte de determinare.

Se definește *corecția bolometrică*, CB, ca fiind diferența dintre magnitudinea aparentă bolometrică, m_b, și magnitudinea aparentă vizuală, m_v, adică

$$CB = m_b - m_v \tag{10.34}$$

Punînd în relația (8.70) $H = \sigma T_e^4$, obținem

$$m_b = C_b' - 5 \lg R + 5 \lg r - 10 \lg T_e, \tag{10.35}$$

unde am notat $C_b' = C_v - 2{,}5 \lg \sigma$.

Relația (10.30), transcrisă pentru domeniul vizual, devine

$$m_v = C_v' - 5 \lg R + 5 \lg r + \frac{1{,}56}{\lambda_v T_e} \tag{10.36}$$

Introducînd expresiile (10.35) și (10.36) în definiția (10.34) rezultă

$$CB = C_{bv} - \frac{1{,}56}{\lambda_v T_e} - 10 \lg T_e, \tag{10.37}$$

unde constanta $C_{bv} = C_b' - C_v'$ se determină cu condiția ca pentru $T_e \simeq T_e$ corecția bolometrică la clasa spectrală $G2V$ (pentru Soare, unde $T_{e\odot} = 5770$ K) să fie nulă. Punînd $\lambda_v = 500$ nm (Johnson), obținem

$$CB = 4{,}25 - \frac{28\,400}{T_e} - 10 \lg T_e \tag{10.38}$$

În determinări de mare precizie trebuie să se țină seama de abaterea radiației stelei de la legile corpului negru, încît în general vom avea

$$CB = \varphi(T_e), \tag{10.39}$$

funcția φ fiind tabulată după T_e sau după tipul spectral (pe baza comparării modelelor de atmosferă cu observațiile). Această funcție diferă de la o clasă de luminozitate la alta. Asemenea tabele ale funcției φ a construit Johnson.

Cunoscînd corecția bolometrică, se poate determina magnitudinea absolută bolometrică. Într-adevăr, pentru o stea dată putem scrie

$$M_b - M_v = m_b - m_v = CB, \tag{10.40}$$

adică

$$M_b = M_v + CB, \tag{10.41}$$

unde magnitudinea absolută vizuală este dată de relația

$$M_v = m_v + 5 + 5 \lg \pi \tag{10.42}$$

Deci, efectuînd observații fotometrice în domeniul vizual, cunoscînd paralaxa anuală a stelei și corecția ei bolometrică (dedusă din spectrul stelei), cu relațiile (10.41), (10.42) obținem magnitudinea absolută bolometrică, iar din aceasta — luminozitatea integrală a stelei. Luminozitățile stelelor variază între limite foarte largi: de la $10^{-5}\ L_\odot$ la $10^{+5}\ L_\odot$.

În tabelul 10.1 sînt daţi parametrii de stare ai stelelor reprezentative, pentru diferite tipuri spectrale şi clase de luminozitate, limitîndu-ne la cîteva stele din jurul Soarelui, mai bine cunoscute.

Tabelul 10.1

Parametrii de stare ai stelelor reprezentative

Steaua	Tip spectral *MK*	$T_e(K)$	$L/L_\odot$	$R/R_\odot$	$\mathcal{M}/\mathcal{M}_\odot$	$\bar{\rho}$(kg/m³)	Observaţii
α Sco A (Antares)	M0 Ib	3 300	34 000	530	19	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	Supergigantă
α Boo (Arcturus))	K2 III	3 970	130	26	4,2	$3{,}2 \cdot 10^{-1}$	Gigantă
η Ori	B1 V	23 000	13 000	7,2	13,7	52	
α CMa A (Sirius)	A1 V	9 700	61	2,4	3,3	810	Secvenţa principală (seria piticelor)
Soarele	G2 V	5 770	1	1	1	1410	
Steaua Barnard	M5 V	3 000	0,015	0,50	0,38	4300	
α CMa B (Sirius B)	A5 VII	8 200	0,0026	0,026	0,96	$7{,}7 \cdot 10^{7}$	Pitică albă

§ 10.6. RELAŢIILE DE STARE ALE STELELOR

Observaţiile asupra stelelor permit punerea în evidenţă a anumitor relaţii între parametrii lor de stare, numite *relaţii de stare*. Acestea au o profundă semnificaţie gnoseologică şi cosmogonică. Ele constituie principalul criteriu observaţional pentru testarea diferitelor teorii de structură şi evoluţie stelară.

1°. **Relaţia spectru-luminozitate (diagrama H—R).** Această relaţie a fost pusă în evidenţă, la începutul secolului nostru, de către E. Hertzsprung şi H.N. Russell, de aceea se mai numeşte şi *diagrama Hertzsprung-Russell*, sau (prescurtat) diagrama H—R. Să luăm două axe de coordonate rectangulare, luînd în abscisă tipul spectral (*Sp*), iar în ordonată magnitudinea absolută vizuală (M_v — fig. 10.1). Reprezentînd în diagramă stelele cu „coordonatele" (*Sp*, M_v) — cunoscute, constatăm că punctele reprezentative nu acoperă întreg planul. Astfel, stelele se aşază în diagramă pe anumite linii (mai bine zis, pe benzi). Majoritatea stelelor (95%) se aşază în *secvenţa principală* sau secvenţa piticelor (unde este şi Soarele). Celelalte ramuri (benzi) ale diagramei sînt ocupate de stelele: *supergigante*, *gigante*, *subgigante*, *subpitice* şi *pitice albe*.

Cunoscînd spectrul unei stele oarecare, din diagramă putem obţine magnitudinea absolută vizuală şi de aici luminozitatea. De asemenea, pe baza relaţiei: $M_v = m_v + 5 + 5 \lg \pi$, măsurînd pe m_v, putem obţine distanţa stelei. Dar o dificultate legată de aşezarea unei stele în diagrama $H-R$ provine din faptul că la acelaşi spectru pot corespunde mai multe ramuri (benzi) ale diagramei. Acest neajuns a fost înlăturat de către Morgan şi Keenan, prin introducerea clasificării spectrale bidimensionale. În acest scop s-au introdus şapte clase spectrale de luminozitate, şi anume:

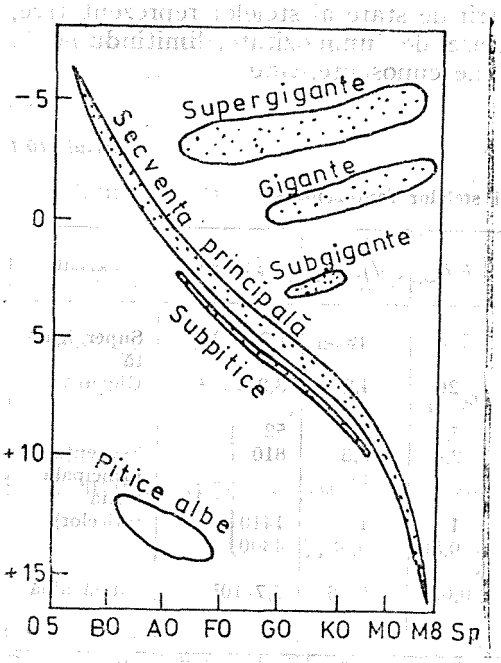


Fig. 10.1. Diagrama H—R.

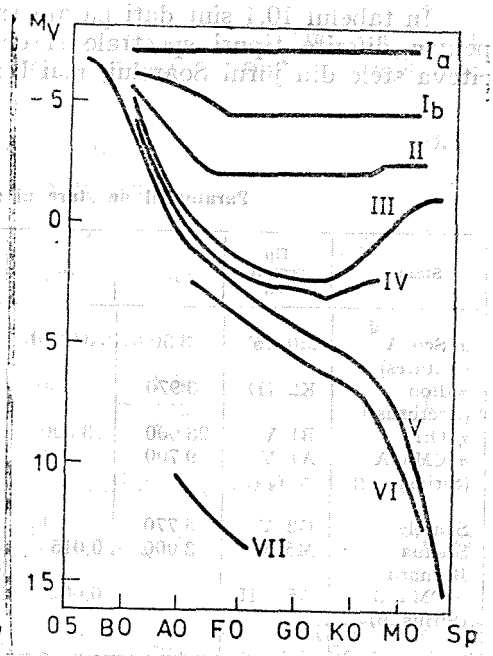


Fig. 10.2. Clasele de luminozitate.

— Clasa de luminozitate I (cu subclasele Ia, Ib), formată din stelele supergigante.
— Clasa de luminozitate II — stelele gigante strălucitoare.
— Clasa de luminozitate III — stelele gigante (normale).
— Clasa de luminozitate IV — stelele subgigante.
— Clasa de luminozitate V — stelele secvenței principale (piticele).
— Clasa de luminozitate VI — stelele subpitice.
— Clasa de luminozitate VII — stelele pitice albe.

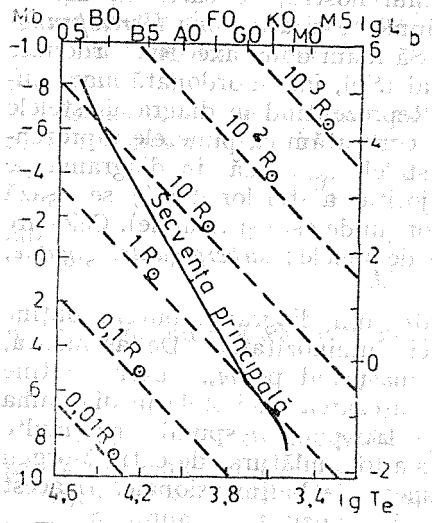


Fig. 10.3. Diagrama (lg T_e, M_b).

Poziția claselor de luminozitate în diagrama $H—R$ se vede în fig. 10.2. Din analiza spectrală, odată cu tipul spectral se determină și clasa de luminozitate. De exemplu, Soarele are spectrul *G2V*. Astfel, pe baza spectrului, poziția stelei este bine (unic) determinată.

Pentru construirea diagramei $H—R$, în locul „coordonatelor" (Sp, M_b), se utilizează adesea alte „coordonate", de exemplu: în abscisă se ia lg T_e (sau indicele de culoare: IC, $B—V$ etc.), iar în ordonată se pune M_b (sau lg L_b). Se obțin astfel diagrame „echivalente" cu diagrama $H—R$ din fig. 10.1. Astfel, în fig. 10.3 avem diagrama (lg T_e, M_b). Se observă că în această diagramă secvența principală este aproximativ o dreaptă.

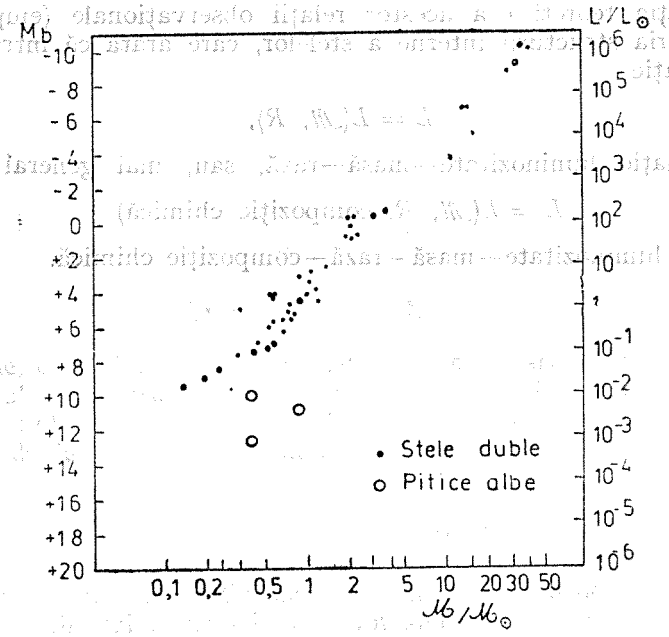


Fig. 10.4. Relaţia masă-luminozitate.

Relaţia (10.28) pentru $R = \text{const.}$ reprezintă o dreaptă în „coordonatele" (lg T_e, M_b). Astfel, în fig. 10.3, liniile întrerupte sînt dreptele de raze egale. Comparînd diagramele 10.2 şi 10.3, rezultă că denumirile: gigante, pitice etc. reflectă diferenţele în dimensiunile diferitelor categorii de stele.

Cunoscînd spectrul unei stele, relaţia spectru—luminozitate (fig. 10.3) ne furnizează numeroase informaţii asupra stelei: luminozitatea, raza, distanţa ş.a. Determinarea acestor mărimi cu ajutorul diagramei $H-R$ se efectuează cu o precizie relativ mică, deoarece relaţia spectru—luminozitate are un caracter statistic (în diagramă avem benzi, nu linii). Această relaţie prezintă o mare importanţă teoretică pentru studiul structurii interne a stelelor şi pentru elaborarea teoriilor de evoluţie stelară.

2°. **Relaţiile masă—luminozitate şi masă—rază.** Stelele duble permit determinarea precisă atît a maselor componentelor, cît şi a luminozităţilor lor. Observaţiile arată că între masele şi luminozităţile lor avem o relaţie (fig. 10.4). După Svecinikov, această relaţie are forma

$$L \sim \mathcal{M}^{3,3}, \text{ pentru } M_b \leqslant 0 \tag{10.43}$$

şi

$$L \sim \mathcal{M}^{5,1}, \text{ pentru } M_b > 0 \tag{10.44}$$

Pe baza observaţiilor s-a pus în evidenţă o relaţie analogă între masele şi razele stelelor, care după Svecinikov are forma

$$R \sim \mathcal{M}^{3/4} \tag{10.45}$$

Explicația teoretică a acestor relații observaționale (empirice) este dată de teoria structurii interne a stelelor, care arată că între L, $\mathcal{M}$, R avem o relație

$$L = L(\mathcal{M}, R), \tag{10.46}$$

adică o relație luminozitate—masă—rază, sau, mai general

$$L = L(\mathcal{M}, R, \text{compoziție chimică}) \tag{10.47}$$

— o relație luminozitate—masă—rază—compoziție chimică.

CAPITOLUL XI

ATMOSFERE STELARE

Stelele, ca și Soarele, sînt formate din două părți (regiuni): atmosfera și interiorul. Prin *atmosferă stelară* înțelegem totalitatea straturilor (superficiale ale) stelei de la care primim direct radiații. *Interiorul* este format din straturile de la care nu primim direct radiații.

§ 11.1. ATMOSFERA SOLARĂ

La stelele normale (din secvența principală), atmosfera este subțire, grosimea învelișului ei principal — fotosfera — este mică în comparație cu raza, de ordinul $10^{-3}\,R$. Atmosferele acestor stele sînt asemănătoare cu atmosfera Soarelui, pe care o descriem mai jos.

Atmosfera solară se compune din trei învelișuri: fotosfera, cromosfera și coroana.

1°. **Fotosfera solară.** Este stratul principal al atmosferei solare. Deși subțire (avînd grosimea de 300—400 km), fotosferei îi revine cea mai mare parte din masa atmosferei solare (masa cromosferei și a coroanei se pot neglija). Relativ densă, nu numai față de coroană, dar și față de cromosferă, fotosfera se prezintă ca un gaz rarefiat (densitatea ei fiind $\rho \sim$ $\sim 10^{-3} - 10^{-4}$ kg/m^3), fierbinte ($T \sim 6000$ K). Practic, întreagă energia solară recepționată de observator provine din fotosferă. Discul solar care se observă în lumină albă (direct sau în proiecție pe un ecran) este fotosfera. În fotosferă se formează spectrul continuu al Soarelui.

Observațiile asupra Soarelui au pus în evidență fenomenul de întunecare spre margine a discului aparent (strălucirea aparentă pe disc scade de la centru spre periferie). Acest fenomen (care are loc și la stele) se explică prin semitransparența straturilor fotosferice și prin existența unui gradient de temperatură în fotosferă. Pentru o aceeași adîncime optică τ, razele care emerg spre observator pe direcția normalei la stea (Soare) provin de la o adîncime geometrică mai mare (deci de la o temperatură mai mare) decît cele care formează un unghi θ cu normala. De aceea intensitatea radiației emergente va fi funcție de θ, adică

$$I_\lambda = I_\lambda(\theta), \text{ respectiv } I = I(\theta) \qquad (11.1)$$

Radiația solară integrală (măsurată prin constanta solară), spectrul continuu, întunecarea spre margine ș.a. sînt fenomene *staționare*. Pe lîngă fenomenele staționare, în fotosferă au loc numeroase fenomene *nestaționare*. Așa sînt:

— *Granulele.* Observaţiile arată că fotosfera are o structură granulară. Granulele au forma de „boabe de orez". O granulă are dimensiuni de ordinul a 700 km şi o viaţă de 5—10 minute. Ele îşi au originea în zona convectivă subfotosferică a Soarelui. Curenţii de convecţie ce se formează aici pot străpunge din timp în timp fotosfera, formînd granulele.

— *Faculele.* Sînt regiuni mai strălucitoare decît fotosfera, care se observă spre marginea discului solar. Sînt legate de intensificarea cîmpului magnetic în acele regiuni în care apar. În timp ce cîmpul magnetic general al Soarelui este de circa 10 Oe ($1\ \text{Oe} = \frac{1}{4\pi}\ 10^3$ A/m), cîmpul magnetic al faculelor este de sute sau mii de ori mai intens. Creşterea intensităţii cîmpului magnetic este legată de intensificarea convecţiei în zona convectivă subfotosferică a Soarelui. Temperatura faculelor este cu 200—300 K mai mare ca a fotosferei. Viaţa unei facule este de la cîteva săptămîni la cîteva luni.

— *Petele.* În regiunile faculelor în care cîmpul magnetic are cea mai mare intensitate, se formează pete solare. Acestea sînt regiuni fotosferice întunecate, cu dimensiuni de zeci de mii de km. Apar în perechi de două pete (sau două grupuri de pete), cu polaritate magnetică opusă (N, S), între latitudinile heliografice $-45°$ şi $+45°$. Au o temperatură cu 1000—1500 K mai scăzută decît a fotosferei şi o durată de existenţă de la cîteva săptămîni la cîteva luni. Formarea petelor solare este legată, de asemenea, de existenţa zonei convective subfotosferice, formată din hidrogen ionizat (plasmă). Mişcările de circulaţie meridiană a plasmei în această zonă generează vîrtejuri magnetice puternice. Dacă acestea intersectează suprafaţa fotosferei, în regiunile respective se formează două pete solare cu polaritate magnetică diferită. Cîmpurile magnetice intense frînează mişcarea particulelor, de aceea petele au o temperatură mai mică şi apar întunecate.

2°. **Cromosfera.** Este aşezată deasupra fotosferei şi este de sute de ori mai puţin strălucitoare ca fotosfera, de aceea observarea ei cere aplicarea unor metode speciale (cel mai bine se observă în timpul eclipselor totale de Soare, cînd fotosfera este acoperită de discul Lunii). Grosimea ei este de circa 12—15 mii km. Cromosfera este extrem de rarefiată (densitatea scade la limita ei superioară pînă la 10^{-12} kg/m^3). La limita dintre fotosferă şi cromosferă, temperatura este de 4500 K. Aceasta este temperatura minimă din atmosfera solară. În cromosferă temperatura creşte din nou cu altitudinea, încît la limita dintre cromosferă şi coroană atinge 1 milion de grade. Acest fapt (*inversarea* gradientului de temperatură) se explică astfel. În zona subfotosferică (şi chiar în fotosferă uneori) se formează *unde* asemănătoare undelor sonore din atmosfera terestră. Propagîndu-se spre exterior, aceste unde se *disipează,* energia lor fiind transferată mişcărilor haotice ale particulelor, a căror viteză creşte. Efectul este cu atît mai pronunţat cu cît mediul este mai rarefiat, de aceea rezultă *temperaturi cinetice* foarte mari (determinate cu relaţia $m\bar{v}^2/2 = (3/2)kT$). Cromosfera produce liniile de absorbţie din spectrul Soarelui.

Printre fenomenele nestaţionare din cromosferă amintim:

— *Spiculele.* Sînt formaţiuni alungite (lungimea — zeci de mii de km, grosimea — o mie de km) care se deplasează (cu viteze de zeci de km/s) din cromosferă spre coroana solară, în care se împrăştie. Prin intermediul lor are loc transferul de materie din cromosferă în coroană.

— *Floculii.* Sînt formaţiuni strălucitoare în cromosferă (avînd aspectul unor „nori"), legate de faculele fotosferice.

— *Erupţiile cromosferice.* Strălucirea în anumite regiuni ale cromosferei (în anumiţi floculi) creşte brusc (în cîteva minute) de cîteva sute sau mii de ori. Apoi, după cîteva zeci de minute, scade din nou. Sînt provocate de presiunea cîmpurilor magnetice ale petelor solare, care duce la formarea unor *unde de şoc.* Acestea duc la creşterea bruscă a densităţii şi temperaturii în regiunea erupţiei. Erupţiile cromosferice sînt însoţite de intensificarea radiaţiei corpusculare a Soarelui (cu $v \sim 1000$ km/s), ca şi a radiaţiei din domeniile X şi radio.

Cromosfera mai este numită atmosfera înaltă a Soarelui.

3°. Coroana solară. Este atmosfera exterioară a Soarelui. Se observă în timpul eclipselor de Soare (sau în afara lor, cu coronograful). Strălucirea ei este de 1 milion de ori mai mică decît a fotosferei (nu depăşeşte pe cea a Lunii pline). Are o formă neregulată, variabilă în timp (în funcţie de numărul de pete solare) şi nu este precis (net) delimitată de mediul interplanetar. Astfel, coroana apare ca o zonă de interacţiune dintre radiaţia electromagnetică şi corpusculară a Soarelui cu mediul interplanetar din jurul său. Partea mai strălucitoare a coroanei, care se întinde de la cromosferă pînă la $0{,}5-1\ R_\odot$, se numeşte *coroana interioară.* Cealaltă parte este *coroana exterioară* şi se poate întinde pînă la cîteva raze solare (şi dimensiunile ei variază în timp). Densitatea ei scade cu distanţa la Soare, de la 10^{-12} kg/m^3 pînă la $\sim 10^{-20}$ kg/m^3 (densitatea mediului interplanetar). În coroană se observă următoarele fenomene:

— *Protuberanţele.* Sînt nori de plasmă fierbinte care ies din cromosferă, avînd aspectul unor flăcări uriaşe (cu lungimi de sute de mii de km şi lăţimi de 6000—10 000 km). Cînd apar în proiecţie pe discul solar se numesc filamente.

— *Regiunile active ale coroanei.* Deasupra petelor solare se observă în coroană regiuni mai strălucitoare, cu o densitate mai mare *(condensări coronale).*

Totalitatea fenomenelor nestaţionare din atmosfera solară se numeşte *activitate solară.* Aceasta are un caracter ciclic, cu un ciclu de circa 11 ani, numit *ciclul activităţii solare* (în care avem maxime şi minime de activitate solară).

Pe lîngă radiaţia electromagnetică, Soarele emite continuu radiaţie corpusculară sub forma *vîntului solar* — flux de particule (electroni, protoni, ioni) cu viteza de 250—500 km/s (debit: $2 \cdot 10^8$ part./cm$^2 \cdot$ s, sau densitatea 3—10 part./cm^3). El acţionează asupra atmosferei terestre prin intermediul magnetosferei. În timpul erupţiilor cromosferice Soarele emite radiaţie cosmică (flux de particule elementare cu viteze apropiate de c).

În ţara noastră, cercetările solare au fost organizate de profesorul Călin Popovici (1910—1977), care a condus cu deosebită competenţă secţia de astrofizică a Observatorului astronomic din Bucureşti*.

---

* Constantin Drâmbă: „75 ani de la înfiinţarea Observatorului astronomic din Bucureşti", în *Anuarul astronomic '83* (Centrul de Astronomie şi Ştiinţe Spaţiale Bucureşti), pp. 267—280, Editura Academiei R.S.R., 1982.

§ 11.2. ECUAȚIA TRANSFERULUI RADIATIV

Energia unei stele, produsă în interiorul ei prin reacții termonucleare, este transferată în atmosfera stelei, iar de aici spre exterior. Acest transfer se poate realiza: prin conductibilitate termică, prin convecție (curenți) sau prin radiație.

În general, transferul prin conductibilitate este neglijabil (cu excepția stelelor cu densitate foarte mare: pitice albe, stele neutronice ș.a.). Convecția poate să joace un rol important pentru transferul energiei în anumite zone din interiorul stelei. În majoritatea cazurilor transferul energiei în fotosfera stelei (partea principală a atmosferei) se face prin radiație (electromagnetică).

Vom considera o stea din secvența principală, care are o atmosferă (fotosferă) subțire ca și Soarele. În acest caz, pentru a studia transferul energiei prin radiație (pe scurt *transferul radiativ*) în fotosfera ei, vom considera că aceasta este formată din straturi plan-paralele. Vom deduce *ecuația transferului radiativ* în această aproximație a modelului plan-paralel, care dă soluții în bună concordanță cu observațiile pentru stelele secvenței principale.

Fie un strat de materie la adîncimea geometrică x, în fotosfera stelei considerate. Vom separa în acest strat, de grosime (geometrică) $\mathrm{d}x$, un cilindru elementar avînd baza de 1 m² și înălțimea $\mathrm{d}s$. Fie θ unghiul format de axa cilindrului cu normala $\vec{n}$ la suprafața stelei (fig. 11.1) ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). În unghiul solid elementar $\mathrm{d}\omega$ baza cilindrului emite (pe frecvența ν) energia: $I_\nu(x, \theta)\,\mathrm{d}\omega$, unde I_ν este intensitatea specifică a radiației. Fie ρ — densitatea materiei din cilindru și κ_ν — coeficientul ei de absorbție (opacitate). Energia absorbită pe drumul $\mathrm{d}s$ în interiorul lui $\mathrm{d}\omega$ va fi

$$-\kappa_\nu \rho I_\nu(x, \theta)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\omega \qquad (11.2)$$

Fie j_ν coeficientul de emisie al materiei cilindrului pe unitatea de masă. Energia emisă de cilindru în $\mathrm{d}\omega$ va fi

$$j_\nu \rho\,\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}\omega}{4\pi} \qquad (11.3)$$

Variația energiei (energia emisă plus energia absorbită) va fi $\mathrm{d}I_\nu(x, \theta)\,\mathrm{d}\omega$, adică, ținînd seama de expresiile (11.2), (11.3), obținem

$$\mathrm{d}I_\nu(x, \theta)\,\mathrm{d}\omega = -\kappa_\nu \rho I_\nu(x, \theta)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\omega + \frac{1}{4\pi} j_\nu \rho\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\omega \qquad (11.4)$$

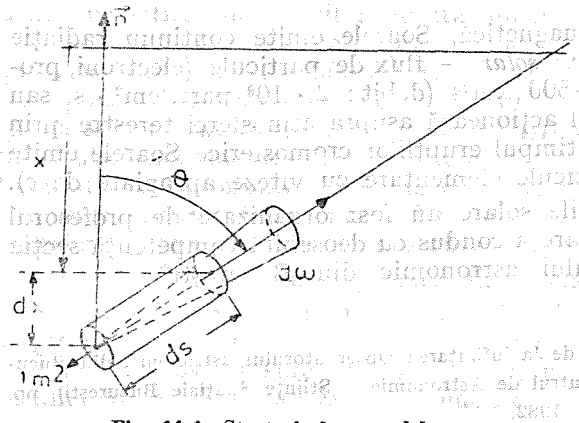


Fig. 11.1. Straturi plan-paralele.

Dacă materia din fotosferă este în echilibru termodinamic, atunci este valabilă legea lui Kirchhoff (8.31), adică

$$j_\nu = 4\pi\kappa_\nu I_\nu = 4\pi\kappa_\nu B_\nu(T) \qquad (11.5)$$

S-ar putea ca în fotosferă să nu avem echilibru termo-

dinamic. Atunci în locul funcției lui Planck, B_ν, vom introduce o altă funcție $\mathcal{J}_\nu(x)$, definită prin relația

$$j_\nu = 4\pi\kappa_\nu \mathcal{J}_\nu(x), \tag{11.6}$$

numită *funcția sursă*. Introducînd expresia (11.6) în ecuația (11.4) și simplificînd cu $d\omega$, primim

$$dI_\nu(x, \theta) = -\kappa_\nu \rho I_\nu(x, \theta)\, ds + \kappa_\nu \rho \mathcal{J}_\nu(x)\, ds \tag{11.7}$$

Din fig. 11.1 se observă că $ds = -dx \sec \theta$. Introducînd adîncimea optică monocromatică τ_ν prin relația

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho\, dx, \quad \text{sau} \quad \tau_\nu = \int_0^x \kappa_\nu \rho\, dx, \tag{11.8}$$

ecuația (11.7) se poate pune sub forma

$$\cos\theta \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \theta)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, \theta) - \mathcal{J}_\nu(\tau_\nu) \tag{11.9}$$

Ecuația (11.9) este *ecuația transferului radiativ pentru radiația monocromatică*. Integrarea ei este o problemă fundamentală în teoria atmosferelor stelare. Soluția depinde de funcția sursă $\mathcal{J}_\nu$, care în general are o structură complicată, depinzînd de mulți factori, printre care însăși distribuția lui I_ν.

Ecuația (11.9) se poate scrie pentru orice frecvență ν. Considerăm pe κ_ν independent de frecvență, deci $\kappa_\nu = \kappa$ *(atmosfera stelară gri)*, iar $\tau_\nu = \tau$. Atunci înmulțind ecuația (11.9) cu $d\nu$ și integrînd pe întreg spectrul (adică între limitele $\nu = 0$ și $\nu = \infty$) rezultă (notînd cu I intensitatea radiației integrale):

$$\cos\theta \frac{dI(\tau, \theta)}{d\tau} = I(\tau, \theta) - \mathcal{J}(\tau) \tag{11.10}$$

Aceasta este *ecuația transferului radiativ pentru radiația integrală* ($\mathcal{J}(\tau)$ este funcția sursă pentru radiația integrală). Ecuația (11.10) se poate aplica și pentru *atmosfere stelare non-gri* (κ depinde efectiv de ν), dacă în adîncimea optică τ, definită prin relația

$$d\tau = \kappa \rho dx, \qquad (\tau = 0 \text{ pentru } x = 0), \tag{11.11}$$

punem $\kappa = \bar{\kappa}$ — coeficientul mediu de absorbție (obținut prin medierea lui κ_ν pe întreg spectrul).

Dacă transferul energiei se realizează numai prin radiație, atunci fiecare element de volum emite, în unitatea de timp, o cantitate de energie egală cu energia absorbită, conform principiului conservării energiei (în atmosferă nu există surse de energie termonucleară). Înseamnă că fluxul integral nu depinde de adîncimea optică τ, adică

$$\mathcal{F} = \int_4 I(\tau, \theta) \cos\theta\, d\omega = \text{constant} \tag{11.12}$$

Înmulțind ecuația (11.10) cu $d\omega/4\pi$ și integrînd după toate direcțiile, obținem, ținînd seama de (11.12):

$$\frac{d}{d\tau}\left[\int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos\theta \frac{d\omega}{4\pi}\right] = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I(\tau, \theta)\, d\omega - \mathcal{J}(\tau) = 0, \quad (11.13)$$

de unde rezultă

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I(\tau, \theta)\, d\omega \equiv J(\tau), \quad (11.14)$$

adică funcția sursă $\mathcal{J}$ se reduce în acest caz la intensitatea medie (după toate direcțiile), J, a radiației integrale.

Ecuația (11.14) este *ecuația echilibrului radiativ* sau *ecuația continuității radiației*, exprimînd conservarea energiei radiației integrale (pentru radiația monocromatică nu este valabilă).

Punînd în (11.14) $d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\Phi$ și integrînd după Φ între 0 și 2π, obținem

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} I(\tau, \theta) \sin\theta\, d\theta \equiv J \quad (11.15)$$

Introducînd expresia (11.15) a funcției sursă în ecuația (11.10), rezultă

$$\cos\theta \frac{dI(\tau, \theta)}{d\tau} = I(\tau, \theta) - \frac{1}{2}\int_0 I(\tau, \theta) \sin\theta\, d\theta \quad (11.16)$$

Aceasta este *ecuația integro-diferențială a transferului radiativ*. Ea se integrează cu condiția la limită: intensitatea radiației emergente $I(0, \theta)$ este egală cu cea dată de observații. Găsind soluția ei, putem determina distribuția temperaturii în fotosferă (variația temperaturii cu adîncimea).

§ 11.3. DESPRE CALCULUL MODELELOR DE ATMOSFERĂ STELARĂ

Proprietățile fizice ale atmosferelor stelare se pot explica pe baza modelelor de atmosferă. Un asemenea model trebuie să permită interpretarea tuturor fenomenelor observate în atmosferă. El trebuie să explice:

— Structura atmosferei, dîndu-ne variația parametrilor fizici: temperatura T, densitatea ρ, presiunea P — cu adîncimea geometrică x.

— Distribuția intensității radiației $\bar{I}_\lambda$ în spectrul continuu și în liniile și benzile spectrale, ca și discontinuitățile spectrale (în general trebuie să explice toate abaterile de la legile corpului negru).

— Fenomenul de întunecare spre margine: în radiația monocromatică ($I_\lambda = I_\lambda(\theta)$) și în radiație integrală ($I = I(\theta)$).

Teoria atmosferelor stelare trebuie să explice, de asemenea, fenomenele nestaționare care au loc în ele (petele, facule, cîmpurile magnetice legate de acestea, erupțiile cromosferice etc.).

Punctul de plecare în construirea unui model de atmosferă îl constituie rezolvarea ecuației transferului radiativ. Ea ne dă distribuția temperaturii $T = T(\tau)$. Pentru a obține distribuția presiunii, vom deduce *ecuația echilibrului hidrostatic.*

Să considerăm un cilindru elementar cu baza $d\sigma$ și înălțimea dx, situat în atmosfera stelei, la adîncimea geometrică x. Forțele care acționează asupra cilindrului (proiectate pe normala la suprafață, $\vec{n}$) sînt:

— greutatea cilindrului

$$d\mathcal{G} = -\rho g dx d\sigma, \tag{11.17}$$

unde ρ este densitatea gazelor în cilindrul considerat, iar g — accelerația gravitațională;

— rezultanta forțelor de presiune pe cele două baze (presiunile laterale se echilibrează)

$$[P(x + dx) - P(x)]d\sigma = \left[P(x) + \frac{dP}{dx}dx + \ldots - P(x)\right]d\sigma = dP d\sigma \tag{11.18}$$

Pentru ca cilindrul să fie în echilibru hidrostatic, trebuie ca

$$d\mathcal{G} + dP d\sigma = 0 \quad \text{sau} \quad -\rho g dx d\sigma + dP d\sigma = 0 \tag{11.19}$$

Simplificînd cu $d\sigma \neq 0$, obținem

$$dP = \rho g dx, \tag{11.20}$$

ecuația echilibrului hidrostatic. Aici P este presiunea totală, adică $P = P_{gaz} + P_{rad}$, unde P_{gaz} este presiunea de gaz, iar P_{rad} — presiunea de radiație. Ecuația echilibrului hidrostatic exprimă faptul că gazele din atmosferă nu se răspîndesc în spațiu și nici nu se contractă (nu „cad" pe interior). Ea este verificată global în atmosferă. Însă local, în zonele de perturbație (unde apar fenomene nestaționare), poate să nu fie verificată.

Împărțind membru cu membru ecuațiile (11.20) și (11.11) (în ultima punînd $\kappa = \bar{\kappa}$) și neglijînd presiunea de radiație, obținem

$$\frac{dP_{gaz}}{d\tau} = \frac{g}{\bar{\kappa}} \tag{11.21}$$

Deoarece $\kappa = \bar{\kappa}(P_{gaz}, T, X, Y)$, ecuația (11.21) se integrează, în general, pe cale numerică, cu condiția la limită

$$P_{gaz} = 0 \quad \text{la} \quad \tau = 0 \tag{11.22}$$

Integrînd, obținem $P_{gaz} = P_{gaz}(\tau)$ — distribuția presiunii cu adîncimea optică.

Variația densității ρ cu adîncimea optică va rezulta din ecuația gazelor perfecte

$$P_{gaz} = \frac{k}{\mu m_H}\rho T, \tag{11.23}$$

unde k este constanta lui Boltzmann, μ — masa moleculară medie a materiei din atmosferă în unităţi atomice de masă (în prima aproximaţie $\mu = \mu(X, Y)$), iar m_H — masa protonului.

În modul indicat mai sus, se poate construi un model de atmosferă pentru o stea din secvenţa principală de „tip solar". Un asemenea model se prezintă sub forma unui tabel care dă variaţia parametrilor fizici cu adîncimea optică τ, sau cu adîncimea geometrică x. El se calculează din τ cu ecuaţia (11.11), care se scrie (punînd $\kappa = \bar{\kappa}$)

$$x = \int_0^{\tau} \frac{-d\tau}{\bar{\kappa}(\tau)\rho(\tau)} \tag{11.24}$$

Ca exemplu, în tabelul 11.1 este dat un model al fotosferei solare, în care adîncimea geometrică x este socotită nu de la limita superioară a fotosferei, ci de la un nivel arbitrar, unde $\tau \simeq 0{,}0125$.

Tabelul 11.1

Modelul fotosferei solare

τ	x (km)	T (K)	P_{gaz} 10^{-1}(N/m²)	P_e 10^{-1}(N/m²)
0,01	— 50	4625	8 000	0,9
0,1	+200	5090	40 000	6,8
1	+335	6460	125 000	69
7	+450	8260	250 000	2000

Reamintind că 1 atm = 1 013 246 dyn/cm², se observă că presiunea de gaz este destul de mică în fotosferă, care se prezintă ca un gaz rarefiat. Presiunea electronică este neglijabilă la Soare ($P_e = N_e kT$, unde N_e este numărul de electroni pe unitatea de volum). Se consideră că radiaţia solară (stelară) ne vine „în medie" de la adîncimea optică $\tau = 2/3$ (stratul cel mai eficient din punctul de vedere al intensităţii radiaţiei).

Pe baza modelului fotosferei se poate deduce structura cromosferei şi a coroanei. Apoi se poate calcula intensitatea radiaţiei în liniile spectrale (profilele liniilor spectrale), utilizînd ecuaţii de transfer radiativ mai complicate decît (11.9).

Astfel, cu ajutorul modelelor teoretice de atmosferă stelară se calculează spectrele teoretice corespunzătoare. Prin compararea acestora cu spectrele reale ale stelelor se deduc condiţiile fizice din atmosferele stelare, proprietăţile lor structurale şi radiative.

Am indicat, în principiu, modul cum se construieşte un model de atmosferă pentru o stea de „tip solar". Calculul modelelor de atmosferă pentru stelele fierbinţi este complicat de faptul că în P trebuie considerată şi presiunea de radiaţie (iar la $\bar{\kappa}$ se adaugă, pe lîngă efectele de absorbţie, şi contribuţia difuziei electronice). La stelele gigante mai trebuie să se ţină seamă, în plus, de faptul că atmosferele nu sînt subţiri, ci extinse (nu mai este valabil modelul plan-paralel, ci trebuie considerat un model sferic).

În ecuațiile care descriu structura unei atmosfere stelare intră trei parametri: (1) fluxul integral al radiației stelei (spre exterior), H (în condiția la limită a ecuației (11.16)); (2) accelerația gravitațională la suprafața stelei, g; și (3) compoziția chimică (dată prin abundențele relative: X, Y, $Z = 1-X-Y$). Rezultă că *o atmosferă stelară staționară este determinată de trei parametri: fluxul integral, accelerația gravitațională și compoziția chimică.*

Explicarea și interpretarea teoretică a fenomenelor nestaționare din atmosfera stelară este o problemă mult mai dificilă decît studiul fenomenelor staționare, problemă care este în curs de rezolvare.

CAPITOLUL XII

INTERIORUL STELELOR

Stelele sînt corpuri formate din gaz ionizat, fierbinte (plasmă), în general sferice sau aproape sferice, cu mase comparabile cu masa Soarelui. După cum am văzut în cap. IX, la o stea deosebim două regiuni: atmosfera și interiorul.

Deși nu este accesibil direct observațiilor, interiorul se poate studia pe baza efectelor produse de el în atmosferă. Acest studiu se efectuează cu ajutorul legilor generale ale fizicii (deduse prin experimente de laborator, sau pe cale teoretică), presupunînd că, în condiții fizice date, aceleași legi fizice sînt valabile pretutindeni în Univers.

Problema interiorului constă în a determina variația parametrilor fizici structurali și radiativi ai stelei: densitatea, presiunea, temperatura, fluxul integral al radiației (sau luminozitatea), distribuția masei etc., de la un punct al stelei la altul (sau de la un strat la altul). Pentru rezolvarea acestei probleme se pleacă de la anumite ipoteze, considerate valabile *a priori*, ipoteze care, în general, se verifică *a posteriori*, prin confruntarea rezultatelor obținute pe baza lor cu datele de observație.

§ 12.1. ECUAȚIILE INTERIORULUI

1°. **Ecuația continuității masei.** Vom considera o stea fără rotație, fără cîmp magnetic, neperturbată mareic, de formă sferică. În acest caz se poate considera că steaua posedă simetrie sferică *(ipoteza simetriei sferice)*, adică densitatea ρ într-un punct este funcție numai de distanța r a punctului considerat la centrul stelei: $\rho = \rho(r)$ (distribuția sferică a densității). Atunci toți parametrii fizici: presiune, temperatură etc. vor fi funcții numai de r. Din ipoteza simetriei sferice rezultă că masa $\mathrm{d}\mathcal{M}(r)$ a învelișului sferic cuprins între sferele de raze r și $r + \mathrm{d}r$ are expresia $4\pi r^2\rho(r)\mathrm{d}r$, adică

$$\mathrm{d}\mathcal{M}(r) = 4\pi r^2\rho(r)\mathrm{d}r \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho(r) \tag{12.1}$$

Am obținut astfel *ecuația continuității masei*, în cazul simetriei sferice. Masa totală cuprinsă în sfera de rază r va fi

$$\mathcal{M}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2\rho(r')\mathrm{d}r', \tag{12.2}$$

iar masa totală $\mathcal{M}$ a stelei va fi dată de relația

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) \mathrm{d}r, \tag{12.3}$$

unde R este raza stelei.

Dacă steaua este în rotație sau este perturbată: gravitațional, magnetic etc., atunci ipoteza simetriei sferice nu mai este valabilă decît în prima aproximație. În aceste cazuri se consideră modele nesferice.

2°. **Ecuația echilibrului hidrostatic.** Ipoteza că steaua este în echilibru hidrostatic este o ipoteză fundamentală nu numai pentru studiul interiorului, dar în general pentru studiul structurii stelei (adică și pentru studiul atmosferei sale). Am dedus ecuația echilibrului hidrostatic pentru atmosferă în cap. XI. Ea se transcrie imediat pentru interior, păstrîndu-și interpretarea dată acolo. Am avut

$$\mathrm{d}P = \rho g \mathrm{d}x \tag{11.20}$$

Punînd $x = R - r$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}r$, obținem

$$\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}r, \tag{12.4}$$

relație care se poate obține și direct (la fel ca (11.20)). În acest caz accelerația gravitațională este dată de relația

$$g = \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2}, \tag{12.5}$$

deci ecuația echilibrului hidrostatic se scrie astfel

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2}\rho(r) \tag{12.6}$$

Și aici P este presiunea totală: $P = P_{gaz} + P_{rad}$.

În anumite faze ale evoluției stelei această ipoteză a echilibrului hidrostatic poate fi violată. Atunci trebuie considerat un model dinamic pentru studiul structurii ei interne.

Observații: 1) Ecuația (12.6) se poate obține din *ecuația lui Euler*, considerînd fluidul stelar în echilibru.

2) Abaterile violente de la echilibrul hidrostatic conduc la exploziile de *novă* sau *supernovă* sau la *colapsul gravitațional*.

3°. **Ecuația echilibrului termic.** În interiorul stelei au loc reacții termonucleare. Acestea constituie sursa care întreține energia radiată de stea în spațiu (sursa principală de energie a stelei). Fie $\varepsilon = \varepsilon(r)$ producția (generarea) de energie pe kilogram de materie pe secundă (la distanța r de centru). Energia $\mathrm{d}L(r)$ produsă de învelișul stelei avînd masa $\mathrm{d}\mathcal{M}(r)$ într-o secundă va fi

$$\mathrm{d}L(r) = \varepsilon(r)\mathrm{d}\mathcal{M}(r) = 4\pi r^2 \rho(r)\varepsilon(r)\mathrm{d}r \tag{12.7}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}L(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho(r)\varepsilon(r) \tag{12.8}$$

Energia totală produsă în sfera de rază r, într-o secundă, va fi

$$L(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') \varepsilon(r') dr', \tag{12.9}$$

unde $L(r)$ este luminozitatea sferei de rază r. Pentru luminozitatea totală a stelei, L, rezultă

$$L \equiv L(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon(r) dr \tag{12.10}$$

Ecuația (12.8) se numește ecuația echilibrului termic. Forma integrală (12.9) a acesteia exprimă faptul că fluxul total de energie spre exterior, $L(r)$, prin suprafața sferei de rază r, este egal cu energia termică produsă în interiorul acestei sfere (adică nu avem acumulări de energie în interior).

4°. **Transferul energiei în stea.** Energia produsă în interior (mai ales în regiunea centrală a stelei) poate fi transferată de la un înveliș sferic la altul spre exterior, în următoarele moduri: prin radiație, prin convecție, prin conductibilitate termică. Transferul prin conductibilitate termică este neglijabil la stelele „obișnuite" (cu densități relativ mici). Este important la stele pitice albe, stele neutronice ș.a.

Vom considera primele două moduri de transfer. La o aceeași stea putem avea unele zone în care transferul energiei se face prin radiație, iar altele — în care transferul are loc prin convecție.

(1) *Ecuația echilibrului radiativ.* În capitolul XI am dedus ecuația transferului radiativ în atmosferă. Analog putem obține ecuația transferului radiativ în interior. Fără a mai repeta toate calculele efectuate în capitolul XI, vom scrie direct rezultatul final:

$$\frac{dP_{rad}(r)}{dr} = -\frac{\kappa(r)\rho(r)L(r)}{4\pi c r^2}, \tag{12.11}$$

unde κ este coeficientul de absorbție (opacitate). Întrucît $P_{rad} = (1/3)aT^4$, rezultă

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3}{16\pi ac} \cdot \frac{\kappa(r)\rho(r)L(r)}{r^2 T^3(r)} \tag{12.12}$$

Ecuația (12.12) permite calculul gradientului de temperatură radiativ, fiind numită *ecuația echilibrului radiativ.* Ea este valabilă în regiunile (învelișurile) care sînt în echilibru radiativ, în care transferul energiei se realizează prin radiație.

(2) *Ecuația echilibrului convectiv adiabatic.* Pentru zonele în echilibru convectiv adiabatic este valabilă ecuația transformării adiabatice

$$P_{gaz} = K\rho^{\gamma}, \tag{12.13}$$

unde $\gamma = C_p/C_v$, iar K — o constantă. Mărimile C_p și C_v sînt căldurile masice (molare) la presiune constantă, respectiv la volum constant, iar γ — exponentul adiabatic.

Din relațiile (11.23) și (12.13) rezultă forma diferențială a ecuație echilibrului convectiv adiabatic

$$\frac{1}{T(r)}\frac{\mathrm{d}T(r)}{\mathrm{d}r} = (\gamma - 1)\frac{1}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r} \tag{12.14}$$

Ecuația (12.14) permite calculul gradientului de temperatură convectiv adiabatic, $(\mathrm{d}T/\mathrm{d}r)_{ad}$, pentru regiunile aflate în echilibru convectiv adiabatic, în care transferul energiei se realizează prin convecție adiabatică.

O stea în care este valabilă relația

$$P_{gaz} = K\rho^{\gamma'}, \gamma' = \frac{C_p - C}{C_v - C},\ C = \text{const.} \tag{12.15}$$

se numește stea politropică.

Dintre ecuațiile (12.12), (12.14), într-o zonă dată se utilizează aceea care dă un gradient de temperatură mai mic (în valoare absolută).

5°. **Ecuația de stare.** La ecuațiile diferențiale anterioare mai trebuie să adăugăm o ecuație (finită), care descrie starea materiei stelare, motiv pentru care ea se numește ecuație de stare. Materia stelară este un amestec de gaz ionizat și de radiație, astfel că presiunea totală este $P = P_{gaz} + P_{rad}$. Presiunea de gaz, P_{gaz}, este dată cu o bună aproximație de ecuația gazelor perfecte*

$$P_{gaz} = \frac{k}{\mu m_H}\rho T, \tag{12.16}$$

unde μ este masa moleculară medie a materiei stelare, în unități atomice de masă (masa moleculară relativă), iar m_H — masa protonului. Presiunea de radiație este dată de ecuația

$$P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4 \tag{12.17}$$

În concluzie, structura interiorului stelei poate fi descrisă cu ajutorul următorului sistem de ecuații

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho(r)\ \text{(I)} \ —\ \text{continuitatea masei}\\
&\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -G\frac{\mathcal{M}(r)}{r^2}\rho(r)\ \text{(II)} \ —\ \text{echilibru hidrostatic}\\
&\frac{\mathrm{d}L(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho(r)\varepsilon(r)\ \text{(III)} \ —\ \text{echilibru termic}\\
&\left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}P_{rad}(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{\kappa(r)\rho(r)L(r)}{4\pi cr^2}\ \text{(IVa)} \ —\ \text{echilibru radiativ}\\
&\text{sau } P_{gaz} = K\rho^{\gamma}\ \text{(IV b)} \ —\ \text{echilibru convectiv adiabatic}
\end{aligned}\right.\\
&P = P_{gaz} + P_{rad},\ P_{gaz} = \frac{k}{\mu m_H}\rho T,\ P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4\\
&\qquad\qquad (V) \ —\ \text{ecuația de stare.}
\end{aligned}\right\} \tag{12.18}$$

* La densități mari (ca în piticele albe, stelele neutronice etc.) materia este degenerată și se supune altor ecuații de stare.

Integrînd sistemul de ecuații diferențiale (12.18), vom obține funcțiile care descriu structura internă a stelei: $\rho = \rho(r)$, $T = T(r)$, $P = P(r)$, $\mathcal{M}(r)$, $L(r)$. Sistemul (12.18), avînd cinci ecuații, ne permite să determinăm în mod unic cele cinci funcții, dacă se dau condițiile la limită corespunzătoare.

6°. **Condiții la limită.** Pentru sistemul de ecuații diferențiale (12.18) avem următoarele condiții la limită, a căror semnificație fizică este evidentă:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{M}(r) = 0, \quad L(r) = 0, \quad \text{pentru } r = 0 \text{ (în centru)} \\ \left.\begin{array}{l} \mathcal{M}(r) = \mathcal{M}, \quad L(r) = L, \\ \rho(r) = 0, \quad T(r) = 0 \\ \text{(rezultă și } P(r) = 0) \end{array}\right\} \text{pentru } r = R \text{ (la suprafață)} \end{array}\right\} \tag{12.19}$$

Deoarece sistemul (12.18) conține (numai) patru ecuații diferențiale, sînt suficiente patru condiții la limită de exemplu

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{M}(r) = 0, \; L(r) = 0 \text{ pentru } r = 0 \\ \rho(r) = 0, \; T(r) = 0 \text{ pentru } r = R \\ \text{(ecuația de stare dă și } P(R) = 0) \end{array}\right\} \tag{12.20}$$

Înseamnă că celelalte condiții: $\mathcal{M}(R) = \mathcal{M}$, $L(R) = L$ sînt în plus, adică nu reprezintă condiții la limită independente. În adevăr, dacă R este dat, valorile lui $\mathcal{M}$ și L rezultă din relațiile de stare masă-rază și masă-luminozitate. În calculul modelelor de structură internă se alege ca parametru independent masa stelei $\mathcal{M}$, iar condițiile amintite se pun sub forma $R(\mathcal{M}) = R$, $L(\mathcal{M}) = L$, în concordanță cu relațiile de stare (10.43)—(10.45).

§ 12.2. ROLUL COMPOZIȚIEI CHIMICE

Pentru integrarea sistemului de ecuații diferențiale (12.18) este necesară cunoașterea mărimilor: μ (masa moleculară medie a materiei stelare), κ (coeficientul de opacitate) și ε (producția de energie pe kilogram de materie pe secundă), ca funcții de condițiile fizice în punctul considerat (de densitatea ρ și temperatura T) și de compoziția chimică a materiei stelare. Deoarece hidrogenul și heliul sînt elementele cele mai abundente în stea, compoziția ei chimică se consideră determinată dacă se cunosc: proporția pe kilogram de materie a hidrogenului (X) și a heliului (Y). Proporția celorlalte elemente (grele) va fi $Z = 1 - X - Y$.

Atunci, conform celor spuse înainte, mărimile μ, κ, ε vor fi funcții de forma

$$\mu = \mu(\rho, T, X, Y) \tag{12.21}$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T, X, Y) \tag{12.22}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X, Y) \tag{12.23}$$

În continuare, vom vedea ce formă aproximativă au aceste funcții.

(1) *Masa moleculară medie.* Se poate arăta că în cazul cînd materia stelară este complet ionizată avem

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}(1-X-Y)} \tag{12.24}$$

adică masa moleculară medie μ depinde numai de compoziţia chimică (în general depinde şi de densitate şi temperatură).

(2) *Opacitatea materiei stelare.* Principalele procese care contribuie la slăbirea intensităţii radiaţiei în interiorul stelelor sînt următoarele:

— tranziţiile legat—liber (de la un nivel energetic discret la unul continuu);

— tranziţiile liber—liber (de la un nivel continuu la altul);

— difuzia electronică (electronii liberi difuzează radiaţia).

Primele două procese pot fi caracterizate printr-un coeficient mediu de absorbţie (pură), κ_a, care, în prima aproximaţie, este dat de legea lui Kramer

$$\kappa_a = \kappa_0(X, Y)\rho T^{-3,5} \tag{12.25}$$

În calculul exact al modelelor stelare trebuie introduse corecţii în legea lui Kramer.

Difuzia electronică este caracterizată printr-un coeficient de difuzie κ_d, dat de relaţia

$$\kappa_d = 0{,}20\ (1 + X)\rho \tag{12.26}$$

Cu ajutorul coeficienţilor κ_a şi κ_d se calculează un coeficient mediu de opacitate, κ. Se obţine astfel expresia funcţiei (12.22), care intră în ecuaţia (12.11).

(3) *Producţia de energie.* Forma funcţiei (12.23), care dă producţia de energie pe kilogram de materie pe secundă, depinde de natura sursei de energie. În interiorul stelelor „obişnuite", reacţiile termonucleare sînt principala sursă de energie, iar ε este de forma

$$\varepsilon = \varepsilon_0(X, Y)\rho T^{\alpha}, \tag{12.27}$$

unde ε_0, în afară de X sau Y, mai poate depinde şi de abundenţa altor elemente chimice, care joacă un rol important în desfăşurarea reacţiei termonucleare generatoare de energie.

§ 12.3. TEOREMA LUI VOGT-RUSSELL (UNICITATEA SOLUŢIEI)

În studiul interiorului stelelor este foarte importantă teorema dată de către V. Vogt şi H. N. Russell (1926—1927). Enunţul ei este următorul:

Întreaga structură internă a stelei şi parametrii de stare de la suprafaţă (luminozitatea şi raza) sînt în mod unic determinaţi prin masa şi compoziţia ei chimică.

Demonstraţia teoremei se reduce la a arăta existenţa şi unicitatea soluţiei sistemului de ecuaţii diferenţiale (I)—(IV) din (12.18), cu condiţiile la limită (12.20). Ea se bazează pe ipoteza că mărimile μ, κ, ε (ca şi

presiunea P) sînt funcţii numai de valorile locale ρ, T şi de compoziţia chimică.

După cum am văzut, supraabundenţa condiţiilor la limită (12.19) impune necesitatea existenţei relaţiilor de stare masă-luminozitate şi masă-rază, necesitate care rezultă şi din teorema lui Vogt-Russell. Deoarece compoziţia chimică intră ca un parametru variabil în ecuaţiile interiorului, înseamnă că în relaţiile amintite va intra şi compoziţia chimică. Teorema lui Vogt-Russell nu a fost demonstrată în cazul general. Strömgren a demonstrat teorema în cazul cînd producţia de energie ε este un produs de puteri în ρ, T de forma (12.27), iar coeficientul de opacitate este de asemenea un produs de puteri în ρ, T de forma (12.25), arătînd că luminozitatea L a stelei se exprimă printr-un produs de puteri în funcţie de masa $\mathcal{M}$ şi raza R. Coeficientul acestui produs va depinde de compoziţia chimică. Prin urmare, există în acest caz o relaţie generală luminozitate—masă—rază—compoziţie chimică.

§ 12.4. MODELE STELARE

O stea reală este un obiect astronomic complex, ale cărui proprietăţi vor fi caracterizate, în general, cu ajutorul unui număr mare de parametri. Principalii parametri structurali sînt cei indicaţi înainte: $\rho(r)$, $T(r)$, $P(r)$, $\mathcal{M}(r)$, $L(r)$. Determinarea acestor funcţii se poate face prin integrarea ecuaţiilor diferenţiale (12.18), ecucaţii care s-au obţinut pe baza unor ipoteze simplificatoare, idealizate. Structura obţinută astfel este structura unui corp idealizat, care aproximează steaua reală, adică este structura unui *model stelar*.

În cazul general, pentru obţinerea modelului de structură stelară (modelul stelar), sistemul de ecuaţii (12.18) se integrează numeric. Plecînd cu valorile de la suprafaţă ale parametrilor şi calculînd din aproape în aproape funcţiile de structură $\rho(r)$, $T(r)$, etc., trebuie să ajungem în centru cu $\mathcal{M}(r) = 0$ şi $L(r) = 0$, variind în mod convenabil compoziţia chimică.

În anumite cazuri particulare, structura modelului se poate obţine sub formă analitică. Dintre modelele analitice, cel mai frecvent utilizate sînt modelele politropice şi modelul standard.

Verificarea modelelor stelare se bazează pe utilizarea relaţiilor de stare. Astfel, relaţiile de stare care se obţin teoretic pentru modele trebuie să concorde cu relaţiile de stare date de observaţii (relaţiile spectru—luminozitate, masă—luminozitate, masă—rază). O altă verificare, indirectă, se obţine cu ajutorul mişcării liniei apsidale, la stelele binare strînse. Perioada acestei mişcări ne furnizează informaţii cu privire la concentrarea spre centru $(\rho_c/\overline{\rho})$ a materiei stelare.

În tabelul 12.1 este prezentat modelul structurii interne a Soarelui, din care se observă cum variază parametrii fizici ρ, T, P în interiorul său.

Soarele este format din două învelişuri: un nucleu radiativ (care se întinde pînă la $r \simeq 0{,}8\ R_\odot$ şi conţine 99,7% din masa Soarelui), deasupra căruia se găseşte un înveliş convectiv. În timp ce în atmosferă abundenţa relativă a elementelor este $X = 0{,}8$; $Y = 0{,}185$; $Z = 0{,}015$, în centrul Soarelui aceasta este $X_c = 0{,}38$; $Y_c = 0{,}60$; $Z_c = 0{,}02$. Energia Soarelui este furnizată de lanţul proton-proton, reacţie care a fost amorsată cu circa 5 miliarde de ani în urmă (la formarea sa).

Tabelul 12.1

Modelul structurii interne a Soarelui

r ($R_\odot = 1$)	ρ (g/cm³)	T (K)	P 10^{-1}(N/m²)
0,0	150	$1{,}5 \cdot 10^{7}$*	$2{,}2 \cdot 10^{17}$
0,2	36	$1{,}0 \cdot 10^{7}$	$4{,}6 \cdot 10^{16}$
0,5	1,3	$3{,}4 \cdot 10^{6}$	$6{,}1 \cdot 10^{14}$
0,8	0,035	$1{,}3 \cdot 10^{6}$	$6{,}2 \cdot 10^{12}$
0,98	0,001	$1{,}0 \cdot 10^{5}$	$1{,}0 \cdot 10^{10}$

* Mai exact $T_c = 1{,}48 \cdot 10^{7}$ K

§ 12.5. SURSELE ENERGIEI STELARE

Principalele surse de energie stelară sînt contracţia gravitaţională şi reacţiile termonucleare.

1°. **Contracţia gravitaţională.** În unele faze ale evoluţiei stelare (de exemplu, în fazele timpurii de formare a stelei), contracţia gravitaţională este sursa principală de energie. Dacă o sferă de gaz rarefiat (un nor interstelar sau o stea deja formată) se contractă, energia ei potenţială se micşorează. Prin aceasta energia cinetică a particulelor gazului creşte, deci creşte temperatura sferei gazoase.

Se poate arăta că energia internă U a unei sfere gazoase la care se poate neglija presiunea de radiaţie este

$$U = -\frac{1}{3(\gamma - 1)}\Omega, \tag{12.28}$$

unde Ω este energia ei gravitaţională, dată de relaţia

$$\Omega = -\alpha_1 \frac{G\mathcal{M}^2}{R} \tag{12.29}$$

α_1 fiind o constantă pozitivă de ordinul unităţii, care depinde de distribuţia densităţii în interiorul sferei (stelei).

Energia totală a sferei gazoase va fi

$$\mathcal{E} = U + \Omega = \frac{3\gamma - 4}{3\gamma - 3}\Omega \tag{12.30}$$

Considerînd că steaua este formată dintr-un gaz monoatomic pentru care $\gamma = 5/3$, obţinem

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\Omega = -\frac{\alpha_1}{2} \cdot \frac{G\mathcal{M}^2}{R} \tag{12.31}$$

Identificînd viteza de variaţie a energiei totale $-\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t$, cu luminozitatea stelei în faza de contracţie, L, obţinem din (12.31)

$$L = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha_1}{2}\frac{G\mathcal{M}^2}{R^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{12.32}$$

Relaţia (12.31) arată că jumătate din variaţia energiei gravitaţionale apare sub formă de luminozitate, cealaltă jumătate duce la încălzirea stelei (creşterea energiei interne).

Considerînd în (12.32) masa şi luminozitatea constante şi integrînd ecuaţia în raport cu R (de la $R = \infty$ la R — actual) şi în raport cu t, rezultă timpul Kelvin t_K de contracţie gravitaţională lentă (sau timpul Helmholtz—Kelvin)

$$t_K = \frac{\alpha_1 G\mathcal{M}^2}{2LR} \tag{12.33}$$

Introducînd în (12.33) datele corespunzătoare pentru Soare şi luînd $\alpha_1 = 1{,}5$ (modelul standard), rezultă $t_{K\odot} = 2{,}5 \cdot 10^7$ ani.

Întrucît luminozitatea şi raza sînt determinate de masa stelei (relaţiile masă—luminozitate şi masă—rază), rezultă că timpul Kelvin este determinat de masă, fiind cuprins între sute de mii de ani (la stele masive) şi miliarde de ani (la stele de masă mică).

În urma contracţiei gravitaţionale lente, steaua se încălzeşte, temperatura ei creşte. Dacă aceasta creşte suficient de mult, se amorsează reacţiile termonucleare (sau steaua trece de la un tip de reacţii termonucleare la altul).

La sfîrşitul evoluţiei stelare, nucleul stelar suferă o contracţie violentă *(colaps gravitaţional)*, într-un timp de ordinul *timpului de cădere liberă* (t_{cl}). Considerînd că $g = G\mathcal{M}/R^2$ rămîne constant în timpul contracţiei şi steaua se prăbuşeşte complet în centrul ei, acest timp este dat de expresia

$$t_{cl} = \sqrt{\frac{2R^3}{G\mathcal{M}}} \tag{12.34}$$

La Soare acest timp este de circa 20 minute. Pentru nucleele de supernovă timpul de cădere liberă reprezintă fracţiuni de secundă.

2°. **Reacţiile termonucleare.** Principalele reacţii termonucleare sînt lanţul proton-proton (p—p) şi ciclul carbon-azot (CN).

(1) *Lanţul proton—proton.* Acest lanţ de reacţii are loc la o temperatură $T > 5 \cdot 10^6$ K. (Este necesară o temperatură mare pentru ca protonii să se ciocnească, depăşind sau străpungînd bariera de potenţial).

Prin ciocnirea a doi protoni rezultă un nucleu stabil de deuteriu (un deuteron ${}_1^2\mathrm{H}$), emiţîndu-se totodată un pozitron (e^+), o particulă neutrino (ν) şi energie. Această reacţie se produce lent, deoarece semidurata vieţii medii a protonului este de ordinul a $8 \cdot 10^9$ ani. Energia furnizată de reacţie este de $6{,}7 \cdot 10^{-14}$ J. Deci

$${}_1^1\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} \rightarrow {}_1^2\mathrm{H} + e^+ + \nu + 6{,}7 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J}\ (8 \cdot 10^9\ \text{ani}) \tag{12.35}$$

Deuteronul captează un proton, formîndu-se un nucleu de heliu uşor, astfel

$${}_1^2\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} \rightarrow {}_2^3\mathrm{He} + \gamma + 8{,}78 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\ (4\ \text{secunde}) \tag{12.36}$$

Două nuclee de heliu 3, reacţionînd între ele, dau un nucleu de heliu şi doi protoni. Adică

$${}_2^3\mathrm{He} + {}_2^3\mathrm{He} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + 2{}_1^1\mathrm{H} + 20{,}56 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\ (4 \cdot 10^5\ \text{ani}) \tag{12.37}$$

Se subînţelege că pentru a se produce ultima reacţie, reacţiile anterioare (12.35), (12.36) trebuie să fi avut loc de două ori.

Se observă că rezultatul reacțiilor (12.35)—(12.37) este sinteza unui nucleu de heliu din patru protoni. Cei doi pozitroni rezultați din reacție vor fi anihilați de către doi electroni, obținîndu-se astfel încă $3{,}26 \cdot 10^{-13}$ J. Deoarece particula neutrino poartă cu ea o parte din energie ($0{,}42 \cdot 10^{-13}$ J), care nu mai apare în procesele energetice ulterioare din interiorul stelei (particula, avînd un „parcurs liber mediu" foarte mare, poate ieși din stea fără să mai interacționeze cu alte particule), rezultă că prin reacțiile lanțului proton—proton (12.35)—(12,37) se eliberează o energie de $4{,}2 \cdot 10^{-12}$ J.

Masa unui proton este de 1,007276 u (unități atomice de masă), iar a unui nucleu de heliu — de 4,0011 u. Deci în reacțiile anterioare apare o diferență de masă $\Delta m = 4 \cdot 1{,}007276 - 4{,}0011 \simeq 0{,}028$ u. Acestei diferențe de masă îi corespunde, conform *formulei lui Einstein*, energia

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta m \cdot c^2 \tag{12.38}$$

adică $\Delta \mathcal{E} = 4{,}2 \cdot 10^{-12}$ J.

Producția de energie pe kilogram de materie stelară pe secundă, corespunzătoare lanțului proton—proton, este dată de relație de forma

$$\varepsilon_{p-p} \sim \rho X^2 T^{\alpha}, \tag{12.39}$$

unde exponentul α ($3 \leqslant \alpha \leqslant 6$) depinde de temperatura T (scade cu T).

(2) *Ciclul carbon—azot (ciclul Bethe).* Acest ciclu se amorsează la temperaturi centrale mari de peste $1{,}5 \cdot 10^7$ K. Reacțiile ciclului carbon—azot sînt următoarele

$$^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{13}_{7}\mathrm{N} + \gamma + 3{,}12 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\ \ (1{,}3 \cdot 10^7\ \text{ani}) \tag{12.40}$$

$$^{13}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + e^+ + \nu + 1{,}92 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\ \ (7\ \text{minute}) \tag{12.41}$$

$$^{13}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \gamma + 12{,}06 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\ \ (2{,}7 \cdot 10^6\ \text{ani}) \tag{12.42}$$

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{15}_{8}\mathrm{O} + \gamma + 11{,}76 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\ \ (3{,}2 \cdot 10^8\ \text{ani}) \tag{12.43}$$

$$^{15}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{15}_{7}\mathrm{N} + e^+ + \nu + 2{,}70 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\ \ (82\ \text{secunde}) \tag{12.44}$$

$$^{15}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 7{,}94 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\ \ (1{,}1 \cdot 10^5\ \text{ani}) \tag{12.45}$$

În cazul de față carbonul joacă rol de catalizator. El nu se „consumă" în reacțiile ciclului refăcîndu-se la sfîrșitul fiecărui ciclu. Deci rezultatul acestor reacții este, ca și la lanțul proton—proton, fuziunea a patru protoni într-un nucleu de heliu. Deoarece particula neutrino poartă cu sine $1{,}15 \cdot 10^{-13}$ J în reacția (12.41) și $1{,}57 \cdot 10^{-13}$ J în reacția (12.44), luînd în considerare și energia rezultată prin anihilarea celor doi pozitroni, energia totală obținută în acest caz va fi $4 \cdot 10^{-12}$ J, adică ceva mai mică decît la lanțul proton--proton. Dar ritmul de eliberare a energiei în cazul ciclului carbon—azot este mult mai mare, producția de energie pe kilogram de materie pe secundă fiind de forma

$$\varepsilon_{CN} \sim \rho X Z_{CN} T^{\alpha}, \tag{12.46}$$

unde Z_{CN} este abundența carbonului și azotului, iar $\alpha = 20$ pentru $T = 15 \cdot 10^6$ K (și aici α scade cînd T crește).

Temperatura centrală a Soarelui fiind de $14{,}8 \cdot 10^6$ K, energia lui este furnizată de lanțul proton—proton. Pentru stelele secvenței principale mai reci decît Soarele sursa de energie este lanțul proton—proton, iar pentru cele mai fierbinți decît Soarele — ciclul carbon—azot.

La stelele gigante, după epuizarea hidrogenului din nucleul convectiv, la temperaturi de ordinul $1{,}5 \cdot 10^8$ K, se amorsează reacțiile heliului, care se transformă succesiv în beriliu ($^8_4$Be), carbon ($^{12}_6$C), oxigen ($^{16}_8$O), neon ($^{20}_{10}$Ne), ajungîndu-se astfel la sinteza elementelor grele.

CAPITOLUL XIII

GALAXIA NOASTRĂ

§ 13.1. STRUCTURA GENERALĂ A GALAXIEI

În acest capitol ne vom ocupa cu studiul structurii Galaxiei noastre, care se prezintă ca un sistem stelar imens, conținînd peste 10^{11} stele. Regiunea Galaxiei cu cea mai mare densitate stelară se observă pe cer sub forma unei benzi strălucitoare, numită *Calea Lactee*. Aceasta este regiunea din jurul planului ecuatorial galactic. Observațiile cu un telescop puternic arată că ea conține un număr imens de stele, precum și materie neorganizată. Stelele strălucitoare care se observă cu ochiul liber sînt stelele cele mai apropiate de Soare din Galaxie.

În capitolele precedente ne-am ocupat cu *stelele staționare*. În afară de stele staționare, Galaxia mai conține numeroase *stele variabile* și *obiecte nestaționare*. De asemenea, Galaxia cuprinde *sisteme stelare* (stele duble, triple, multiple, roiuri de stele).

Materia neorganizată, din gaz și praf interstelar, formează — în regiunile în care densitatea este mai mare — *nebuloase difuze* (luminoase) și *nebuloase obscure*. Particulele elementare, mișcîndu-se cu viteze apropiate de viteza luminii, formează radiația cosmică.

O altă componentă a Galaxiei o constituie *cîmpurile*. *Cîmpul gravitațional* guvernează mișcările în Galaxie. De *cîmpul magnetic* este legată structura cu brațe spirale a Galaxiei. *„Cîmpul radiativ"* (radiația electromagnetică) contribuie la „activizarea" norilor cosmici de materie neorganizată (nebuloasele), din care se formează noi stele.

Cunoscînd distanțele stelelor, se poate studia distribuția lor în spațiu și deci structura Galaxiei. În acest scop se definește *densitatea stelară* ca fiind numărul de stele care se găsesc în unitatea de volum (1 pc^3), într-un loc dat.

În jurul Soarelui, densitatea stelară este circa 0,12 stele pe parsec cub (la o stea revin peste 8 pc^3, distanța medie dintre stele fiind de circa 2 pc). Densitatea stelară crește pe măsură ce ne apropiem de planul ecuatorului galactic. De asemenea, observațiile arată o creștere pronunțată a densității stelare în direcția constelației Săgetătorului, în care se găsește centrul Galaxiei noastre, avînd coordonatele $\alpha = 265°$, $\delta = -29°$.

Galaxia este un sistem turtit, simetric față de planul ecuatorial galactic, avînd o formă lenticulară. Diametrul mare al Galaxiei este de 30 000 pc, iar diametrul mic — de 5000 pc. Soarele se găsește aproape de planul ecuatorial galactic (la 25 pc nord de acesta), la o distanță de aproape 10 000 pc de centrul Galaxiei. Galaxia posedă un nucleu central cu o

densitate stelară foarte mare, avînd axa mare de 4,8 kpc, iar axa mică de 3,1 kpc. Prin metodele radioastronomiei s-a dovedit că din acest nucleu pornesc brațe spirale asemănătoare cu cele ale altor galaxii (de exemplu, galaxia din Andromeda — M 31). Brațele spirale se desfășoară în planul ecuatorial galactic. Soarele se găsește în unul din brațele spirale.

Majoritatea obiectelor galactice ocupă un spațiu în formă de disc în jurul planului ecuatorial galactic. Aici se găsesc stelele de tip spectral timpuriu O, B, cefeidele clasice (δ Cep), stelele supernove, roiurile stelare deschise, asociațiile stelare și nebuloasele obscure (de praf). Aceste obiecte formează *subsistemul plan al galaxiei* (stelele corespunzătoare se numesc stele de *populația I-a*)

Alte obiecte din Galaxie, cum sînt: stelele tip RR Lyrae, W Virginis, stelele subpitice și roiurile stelare globulare, ocupă un volum aproape sferic avînd ca plan diametral planul ecuatorului galactic. Aceste obiecte formează *subsistemul sferic al galaxiei* (stelele corespunzătoare se numesc stele de *populația a II-a*). Ele se concentrează spre centrul Galaxiei.

Există și o a treia categorie de obiecte, ca: stelele nove, variabilele lung periodice, piticele albe, nebuloasele planetare, care ocupă volume elipsoidale. Ele formează *subsisteme intermediare*, între subsistemul plan și cel sferic.

§ 13.2. MIȘCAREA STELELOR. ROTAȚIA GALAXIEI

1°. **Mișcarea stelelor.** Observațiile arată că stelele se mișcă față de Soare. Fie o stea care la un moment dat ocupă poziția σ_0, iar după o unitate de timp ocupă poziția σ. Atunci viteza relativă $\vec{V}$ a stelei față de Soarele S va fi măsurată de vectorul $\overrightarrow{\sigma_0\sigma}$ (fig. 13.1) (pe un interval mic de timp mișcarea se consideră rectilinie). Proiecția V_r a lui $\vec{V}$ pe raza vizuală se numește viteză radială. Componenta V_t a vitezei, perpendiculară pe raza vizuală se numește viteză tangențială.

Viteza radială se determină pe baza efectului Doppler, cu formula (9.15), care se scrie

$$V_r = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \qquad (13.1)$$

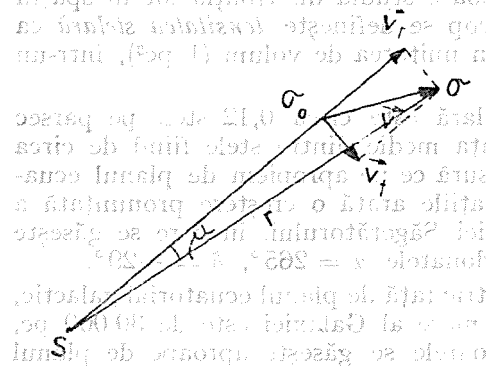


Fig. 13.1. Mișcarea stelelor.

Pentru a determina viteza tangențială V_t, se definește *mișcarea proprie anuală* a stelei, μ, ca fiind unghiul sub care se observă deplasarea stelei într-un an. Atunci din figură avem

$$V_t = r \sin\mu = r\mu_{rad} = r\mu''/206\,265'' \text{ pc/an} \qquad (13.2)$$

$$r = \frac{1}{\pi''}\text{pc} = \frac{206\,265''}{\pi''}\text{ UA} \qquad (13.3)$$

Introducînd (13.3) în (13.2) și ținînd seama de faptul că 1 UA/an = 4,74 km/s, obținem

$$V_t = 4{,}74\mu''/\pi'' \tag{13.4}$$

Cunoscînd componentele V_r și V_t, rezultă viteza V din

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_t^2} \tag{13.5}$$

Astfel se determină *viteza mișcării relative* a unei stele față de Soare. Ea se compune din *viteza mișcării paralactice* a Soarelui, $V_\odot$, și *viteza mișcării peculiare* (particulare) a stelei, V_{pec}, în Galaxie. Cunoscînd pe $\vec{V}$ și $V_\odot$, se poate determina V_{pec}.

Viteza Soarelui se determină prin metode statistice. Observațiile arată că $V_\odot \simeq 20$ km/s. Punctul de pe sfera cerească spre care este orientat vectorul $\vec{V}_\odot$, așa cum s-a mai menționat în cap. IV, se numește *apex* (punctul diametral opus — *antapex*). Apexul solar are coordonatele $\alpha = 270°$, $\delta = 30°$.

2°. **Rotația Galaxiei.** Studiul statistic al distribuției vitezelor stelelor din Galaxie duce la concluzia că aceasta este antrenată într-o mișcare de rotație în jurul axei polilor galactici — *mișcarea de rotație a Galaxiei*. Viteza de rotație variază cu distanța la centrul Galaxiei *(rotația diferențială)*.

Mișcarea de rotație a Galaxiei are următoarele particularități:

— Privită din direcția polului nord galactic, aflat în constelația Părul Berenicei, rotația Galaxiei are loc în sens retrograd.

— Viteza unghiulară de rotație se micșorează pe măsura îndepărtării de centrul Galaxiei. Această micșorare este mai lentă decît dacă rotația stelelor s-ar efectua după legile lui Kepler.

— Viteza liniară de rotație la început crește pe măsura îndepărtării de centru. Apoi, aproximativ la distanța Soarelui, ea atinge valoarea maximă de circa 240 km/s, după care scade lent.

— Soarele și stelele din vecinătatea sa efectuează o rotație completă în jurul centrului Galaxiei în aproximativ 200 milioane de ani. Acest interval de timp se numește *an galactic*.

În țara noastră, primele cercetări de astronomie galactică (stele duble, roiuri stelare, rotația Galaxiei), ca și de astronomie extragalactică, au fost efectuate de profesorul Constantin Pîrvulescu (1890—1945).

§ 13.3. STELE DUBLE

Observațiile arată că stelele se grupează în sisteme de stele. Stelele simple sînt mai degrabă o excepție decît o regulă. Există stele duble, triple, multiple, roiuri stelare. Cel mai simplu sistem stelar este *sistemul binar* — format din două stele (componente).

1°. **Clasificarea stelelor duble.** Avem:

- **stele duble**
  - *optice* — numai direcțiile componentelor sînt apropiate, între ele nu există nici o legătură fizică
  - *fizice*
    - vizuale
    - fotometrice
      - tip Algol
      - tip β Lyrae
      - tip W UMa
      - } variabile cu eclipsă
      - elipsoidale — variabile fără eclipsă
    - spectroscopice

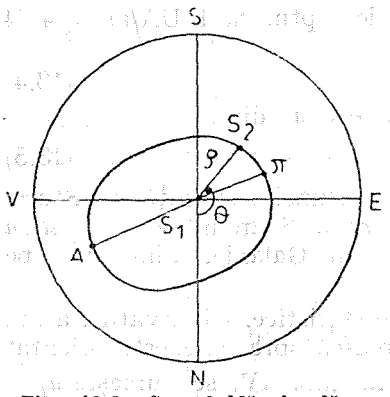


Fig. 13.2. Stea dublă vizuală.

Cînd vorbim de *sisteme binare* avem în vedere *stelele duble fizice*, la care se pune în evidenţă interacţiunea gravitaţională a componentelor. La acestea se observă o mişcare orbitală (absolută sau relativă) kepleriană a componentelor.

După modul cum se pune în evidenţă mişcarea orbitală, sistemele binare se numesc: vizuale, fotometrice sau spectroscopice. Dacă dimensiunile componentelor sînt comparabile cu distanţa dintre ele, sistemul binar se numeşte *strîns* (aşa sînt binarele fotometrice şi spectroscopice). În caz contrar, sistemul se numeşte *larg* (binarele vizuale).

Elementele orbitale ale sistemului binar se pot defini analog cu elementele orbitei unei planete, luînd ca plan de referinţă planul perpendicular pe raza vizuală.

2°. **Stele duble vizuale.** Dacă cele două stele S_1 şi S_2 se observă separat în cîmpul vizual al lunetei (telescopului) (fig. 13.2), atunci faptul că ele formează un sistem binar se poate stabili vizual. Se poate determina din măsurători *orbita aparentă* a sistemului, din care se poate calcula *orbita* lui *reală*. Determinînd astfel semiaxa mare a a orbitei şi perioada de revoluţie siderală P (care rezultă direct din observaţii), cu formula (10.7), se poate calcula suma maselor componentelor (ex.: ξ UMa).

3°. **Stele duble fotometrice.** Duplicitatea rezultă din variaţia periodică a strălucirii aparente a sistemului, prin eclipsarea reciprocă (periodică) a componentelor, care nu se observă separat *(stele variabile cu eclipsă)*. Graficul variaţiei magnitudinii aparente cu timpul se numeşte *curbă de lumină*. În acest caz, raza vizuală este în (sau aproape de) planul orbitei (fig. 13.3).

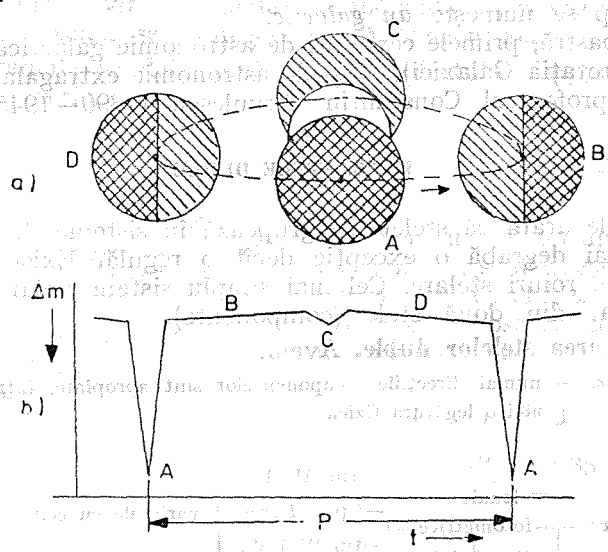


Fig. 13.3. Binară fotometrică de tip Algol. a) Succesiunea eclipselor. b) Curba de lumină.

Binarele fotometrice de *tip Algol* au componente sferice sau sînt puţin deformate. Succesiunea eclipselor şi curba de lumină sînt indicate în fig. 13.3. Binarele de tip β *Lyrae* au componente elipsoidale (curba de lumină este mai netedă, iar variaţia de lumină între eclipse mai amplă). Cele de tip *W UMa* au componente puternic deformate, *în contact*, una cu alta.

Unele binare prezintă variaţie de lumină, chiar dacă nu are loc fenomenul de eclipsă, datorită deformării componentelor (în cursul mişcării orbitale variază aria discurilor aparente).

Analiza curbei de lumină permite obţinerea a numeroase date fizice corespunzătoare componentelor sistemului.

4°. **Stele duble spectroscopice.** În spectrele unor stele se observă dedublarea şi oscilaţia periodică a liniilor spectrale. Pe baza efectului Doppler se deduce că avem de-a face cu două stele (un *sistem binar spectroscopic*), care gravitează în jurul centrului comun de masă. Viteza radială a unei componente variază periodic cu timpul. Graficul acestei variaţii se numeşte *curba vitezelor radiale*. Dacă sistemul este o variabilă cu eclipsă perioada P a variaţiei de lumină coincide cu perioada de variaţie a vitezelor radiale. Uneori nu se observă dedublarea liniilor spectrale, ci numai oscilaţia lor periodică (dacă una din componente este mult mai puţin strălucitoare decît cealaltă).

Din analiza curbei vitezelor radiale, combinată cu analiza curbei de lumină (dacă există variaţie de lumină), rezultă numeroase informaţii cu privire la sistemul binar.

5°. **Sateliţii invizibili ai stelelor.** În unele cazuri duplicitatea este dedusă din perturbarea mişcării proprii. În mişcarea proprie steaua nu descrie un arc de cerc mare $\sigma_0\sigma$ (fig. 13.1), ci un arc sinusoidal. Aplicînd teoria perturbaţiilor, se poate determina masa corpului perturbator. De obicei, asemenea sisteme sînt numite tot „duble vizuale". În acest caz ar fi mai corectă utilizarea termenului de *sistem binar astronomic* (aici ar intra şi binarele separate prin *metode interferenţiale*).

În modul arătat mai sus, la anumite stele s-au descoperit „sateliţi invizibili". Ulterior, unii dintre aceştia s-au dovedit a fi vizibili, dar foarte slabi; de exemplu: Sirius B, satelitul lui Procyon şi, în general, *piticele albe* (stele cu mase comparabile cu masa Soarelui, raze comparabile cu raza Pămîntului şi densităţi foarte mari, de ordinul a 10^9 kg/m^3). Dar alţi sateliţi de acest fel sînt în adevăr „invizibili", fiind *obscuri* (avînd masă mică, nu radiază, deci nu sînt stele ci planete). Aşa sînt sateliţii stelei Barnard, descoperiţi de Van de Kamp. Prin descoperirea acestor *sateliţi obscuri* ai unor stele s-a dovedit existenţa şi a altor sisteme planetare diferite de al nostru.

§ 13.4. STELE VARIABILE ŞI OBIECTE NESTAŢIONARE

Se numesc *stele variabile* stelele a căror strălucire aparentă variază cu timpul. Avem două categorii de stele variabile: *stele variabile fizice (intrinseci)* şi *stele pseudovariabile (variabile cu eclipsă)*. La o stea intrinsec variabilă, strălucirea aparentă variază datorită proceselor fizice care au loc în stea, deci variază luminozitatea ei. La o stea pseudovariabilă, variaţia de lumină este aparentă, datorîndu-se unui fenomen geometric (nu fizic!) — eclipsarea reciprocă a componentelor. De aceste stele ne-am ocupat în § 13.3.

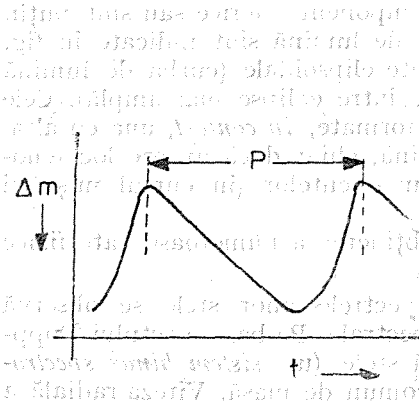


Fig. 13.4. Curba de lumină.

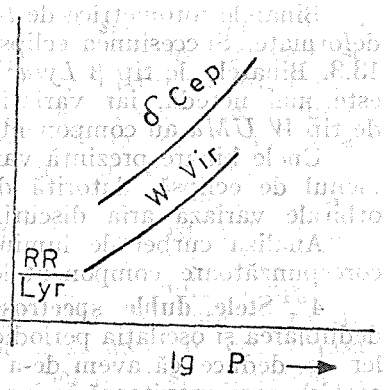


Fig. 13.5. Relația perioadă-luminozitate.

În acest paragraf ne vom ocupa de stelele variabile fizice. Variația strălucirii aparente este în general însoțită și de variația altor parametri de stare: raza, spectrul, temperatura efectivă, uneori masa etc. Acest fapt este de așteptat ținînd seama de relațiile între parametrii de stare (inclusiv relațiile de stare). La unele stele variabile, la o variație neînsemnată a strălucirii aparente corespunde o variație importantă a altor parametri de stare, ca: spectrul *(variabile spectrale)*, cîmpul magnetic *(variabile magnetice)* etc.

Stelele variabile fizice sînt de două tipuri: *variabile pulsante* și *variabile eruptive*.

1°. **Variabile pulsante.** La acestea variația luminozității se explică prin pulsațiile stelei. Condițiile fizice din interior sînt de așa natură încît un anumit mecanism fizic amorsează în stea un proces oscilatoriu, care este menținut un timp îndelungat. În acest proces parametrii de stare ai stelei: temperatura, densitatea, raza etc. (deci și luminozitatea și strălucirea aparentă) variază periodic. Pulsațiile stelei apar într-o anumită fază de instabilitate în evoluția ei.

Variabile pulsante sînt:

(1) *Cefeidele.* Luminozitatea variază periodic, cu o perioadă P de la o zi la cîteva zeci de zile. Variația luminozității este însoțită de variația spectrului. Numele de cefeidă vine de la reprezentantul clasei de variabile: steaua δ Cephei, a cărei curbă de lumină este dată în fig. 13.4, în care variația magnitudinii aparente Δm este reprezentată ca funcție de timpul t. Viteza radială a stelei variază cu aceeași perioadă P, de unde rezultă că raza stelei variază periodic. Amplitudinea de variație a luminii este de circa 1^m.

La cefeide observațiile au pus în evidență o relație între perioada de pulsație și luminozitate (sau magnitudinea absolută M) — *relația perioadă—luminozitate* (fig. 13.5). Această relație are o deosebită importanță practică și teoretică. Importanța practică rezultă din faptul că pe această relație se bazează determinarea distanțelor stelelor îndepărtate. Cefeidele, fiind stele gigante, se observă pînă la mari distanțe. Din observații se determină m și P. Relația permite obținerea lui M și P. Apoi din relația

$M = m + 5 - 5 \lg r$ rezultă distanța r în parseci. Importanța teoretică derivă din faptul că relația constituie o verificare a teoriei pulsației.

Variabilele *W Virginis* sînt asemănătoare cu cefeidele, dar mai puțin strălucitoare (fig. 13.5) (stele de populația a II-a).

(2) *Variabilele tip RR Lyrae.* Au o variație de lumină asemănătoare cu cefeidele, dar perioade mai scurte (în general sub o zi; majoritatea în jurul a 0,5 zile). Poziția lor în diagrama perioadă—luminozitate este indicată în fig. 13.5.

(3) *Variabilele lung periodice* (tip Mira Ceti) au perioade de variație între 100 și 1000 de zile.

Mai există și alte tipuri de variabile pulsante.

2°. **Stele variabile eruptive.** La aceste stele variația strălucirii se explică prin erupția materiei din învelișurile exterioare ale stelei. Uneori această erupție poate lua forma unei explozii grandioase prin care învelișurile stelei sînt expulzate în spațiu. Variabile eruptive sînt:

(1) *Stelele nove.* În fazele tîrzii de evoluție, unele stele suferă explozii puternice prin care învelișurile exterioare sînt expulzate în spațiu. O asemenea explozie are consecințe catastrofale pentru stea, care nu mai poate reveni, după explozie, la starea anterioară de echilibru. În timpul exploziei, magnitudinea stelei scade cu $10^m - 13^m$ (luminozitatea crește de zeci de mii — sute de mii de ori). Există nove la care s-au observat două sau mai multe erupții *(nove recurente)*. Printr-o explozie de novă se eliberează o energie de $10^{38} - 10^{39}$ J, iar materia expulzată se împrăștie în spațiu cu viteze de ordinul a 1000 km/s. Între explozii o novă se prezintă ca o stea pitică albastră (fierbinte). După una sau mai multe explozii, steaua se transformă într-o pitică albă.

(2) *Stelele supernove.* Sînt stele variabile explozive asemănătoare novelor, dar explozia are un caracter mult mai violent și nu se mai repetă. În timpul exploziei magnitudinea scade cu circa 20^m (luminozitatea crește de circa 10^8 ori). Fenomenul de supernovă este rar: odată la circa 400 de ani într-o galaxie. Asemenea explozii pot suferi, în stadiile tîrzii de evoluție, stelele cu masă inițială mare. După explozie steaua se transformă într-o stea neutronică sau într-o gaură neagră. În Galaxia noastră, cea mai remarcabilă asemenea explozie a avut loc, după cronicile chineze, în anul 1054, iar resturile ei se observă astăzi sub forma unei nebuloase în expansiune cu viteza de 1000 km/s — *nebuloasa Crabul.*

Mai există și alte tipuri de variabile eruptive, la care efectele explozive sînt mult mai reduse.

(1) *Pulsarii.* În 1967, la Observatorul Cambridge (Anglia), au fost descoperite niște surse cosmice care emiteau în domeniul undelor radio impulsuri scurte, periodice, cu perioade sub 1 s. Acestea au fost numite pulsari. Un pulsar emite un flux de energie de $10^{28} - 10^{29}$ W. Cercetările au arătat că pulsarii sînt corpuri relativ mici ($\mathcal{M} \simeq 1\ \mathcal{M}_\odot$, $R \simeq 10$ km), ceea ce înseamnă că radiația emisă de ei este de-a dreptul fantastică și nu poate fi de natură termică (legea lui Stefan-Boltzmann ar da $T \sim$ $\sim 10^{14}$ K). Studiul pulsarilor a arătat că aceștia sînt *stele neutronice* (cu densități de ordinul a $10^{17} - 10^{18}$ kg/m^3). Asemenea stele se formează în urma colapsului gravitațional care are loc în nucleul unei supernove (sînt deci resturile exploziilor de supernovă). Radiația stelei neutronice se explică prin frînarea rotației realizată de cîmpul magnetic intens al acesteia.

Impulsurile se formează prin rotația stelei în jurul unei axe care nu coincide cu axa magnetică. Steaua din centrul nebuloasei Crabul este un pulsar.

(2) *Sursele de raze X.* Au fost descoperite, de asemenea, în deceniul al șaptelea. Prima „stea Röntgen" descoperită a fost sursa Sco X-1 (sursa X-1 din constelația Scorpia). Ea emite numai în domeniul X un flux de energie de $5 \cdot 10^{29}$ W, adică de peste 1000 de ori mai mult decît Soarele în întreg spectrul.

Stelele Röntgen sau sursele compacte de raze X (spre deosebire de sursele extinse de raze X, ca de exemplu sursele extragalactice) se consideră că fac parte din sisteme stelare binare strînse. Radiația X este emisă în procesul de acreție a materiei pe componenta stea neutronică. În unele cazuri acreția poate avea loc pe o *gaură neagră,* ca de exemplu în cazul sursei Cyg X-1. La o gaură neagră, raza geometrică este mai mică decît raza gravitațională (Schwarzschild) R_g, unde

$$R_g = \frac{2G\mathcal{M}}{c^2} \qquad (13.6)$$

La un asemenea corp viteza de evadare ar depăși viteza luminii. Conform teoriei relativității, viteza luminii este viteza maximă posibilă, deci dintr-o asemenea stea nici fotonul nu poate evada. De aici derivă denumirea de gaură neagră.

(3) *Nuclee stelare cu nebuloase planetare.* Unele stele sînt înconjurate de nebuloase care au aspectul unui disc planetar (nebuloase planetare). Steaua centrală (nucleul nebuloasei) este o stea fierbinte de tip Wolf-Rayet. Nebuloasa (un inel gazos cu diametrul de ordinul a 0,05 pc) este în expansiune cu o viteză de zeci de km/s. Rezultă că ea s-a format prin expulzarea unui înveliș exterior al stelei. Nucleul stelar cu nebuloasă planetară este un stadiu evolutiv de transformare a stelei în stea pitică albă.

În țara noastră cercetări asupra stelelor variabile, ca și asupra stelelor duble, se efectuează la Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj-Napoca și la Centrul de Astronomie și Științe Spațiale din București.

Profesorul Ioan Armeanca (1900—1954), socotit primul astrofizician român în sensul strict al cuvîntului, a inițiat primele cercetări din țara noastră (la Observatorul astronomic din Cluj) de fotometrie fotografică și fotoelectrică a stelelor variabile și sistemelor stelare binare strînse (binare fotometrice). Aceste cercetări au fost continuate de profesorul Gheorghe Chiș (1913—1981) și dezvoltate de colaboratorii acestuia. La Observatorul astronomic din București sectorul de fotometrie stelară a fost organizat de profesorul Călin Popovici.

Ca o recunoaștere a rezultatelor obținute de specialiștii români în studiul sistemelor stelare binare strînse, țării noastre i s-a atribuit sarcina de coordonare a activității Subcomisiei nr. 5 „Stele duble" din Comisia de colaborare multilaterală a academiilor de științe din țări socialiste pe tema „Fizica și evoluția stelelor".

§ 13.5. ROIURI ȘI ASOCIAȚII STELARE

Roiurile stelare sînt sisteme de stele care interacționează dinamic. Sînt de două feluri: *roiuri deschise* — cu o densitate stelară mai mică și care nu se delimitează destul de net de fondul stelar galactic și *roiuri globulare*

— cu o densitate stelară mare, avînd formă sferică. Densitatea stelară este în ambele cazuri mai mare decît în cîmpul galactic şi scade de la centru spre periferie, unde este egală cu a cîmpului galactic. Roiurile deschise au zeci — sute de stele. Cele globulare au mii — zeci de mii de stele.

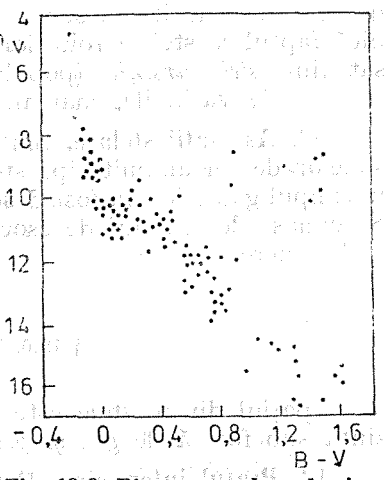


Fig. 13.6. Diagrama culoare-luminozitate pentru roiul Praesepe.

1°. **Roiurile deschise.** Se găsesc în apropierea planului ecuatorial galactic (subsistemul plan). Se cunosc peste 800 de roiuri deschise, observate într-un spaţiu cu raza de cîţiva kpc în jurul Soarelui (mai departe nu se pot observa). Numărul lor total în Galaxie este estimat la cîteva zeci de mii. Cel mai cunoscut roi deschis poartă numele de Pleiade. Separarea stelelor roiului de stelele cîmpului galactic se poate face cu ajutorul diagramei *culoare—luminozitate* — fig. 13.6 — (pentru roiurile stelare aceasta este echivalentă cu diagrama H—R). Mai există şi alte metode de separare: studiul mişcărilor proprii, vitezelor radiale etc. Diametrele roiurilor deschise sînt de ordinul a cîţiva parseci.

2°. **Roiurile globulare.** Formează un subsistem sferic al Galaxiei cu o puternică concentrare spre centrul ei. Diametrele lor sînt în jurul a 40 pc. Avînd o mare luminozitate, se observă pînă la marginile Galaxiei, cu excepţia celor din planul galactic, care nu se observă din cauza puternicei absorbţii interstelare. Numărul lor este de ordinul a 100. Diagramele lor culoare—luminozitate (fig. 13.7) au un aspect aparte, fiind deosebite

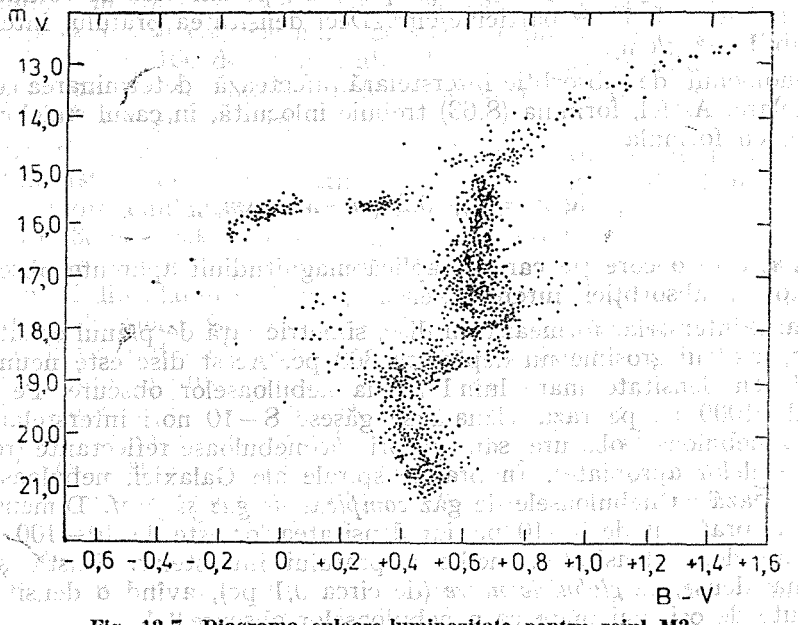


Fig. 13.7. Diagrama culoare-luminozitate pentru roiul M3.

de cele ale roiurilor deschise sau ale stelelor din cîmpul galactic. Ele indică faptul că stelele roiurilor globulare sînt într-un stadiu evolutiv avansat, fiind *stele vîrstnice* (populația a II-a). Roiurile globulare conțin numeroase stele variabile, mai ales de tipul RR Lyrae.

3°. **Asociații stelare.** Sînt sisteme de stele în care densitatea stelară a stelelor de un anumit tip este mult mai mare decît densitatea lor medie în cîmpul galactic. Au fost descoperite de V. A. Ambarțumian, în anul 1947. Se cunosc două feluri de asociații: asociațiile O și asociațiile T, conținînd stele tinere.

§ 13.6. MATERIA INTERSTELARĂ

Spațiul dintre stele este ocupat de materia interstelară, care se prezintă sub formă de *gaz* și *praf* interstelar.

1°. **Praful interstelar.** Fotografiind Calea Lactee, pe clișee se observă o mare neomogenitate în distribuția stelelor, care se explică prin prezența în Galaxie a unor nori de materie absorbantă, numiți *nebuloase obscure*, (ex. Nebuloasa Cap de cal). Acestea apar ca niște pete pe fondul luminos al Căii Lactee. Nebuloasele obscure se găsesc în jurul planului ecuatorial galactic. Prin absorbția puternică pe care o produc, ele împiedică observațiile la distanțe mari în planul Galaxiei. Prezența în spațiul interstelar a unui mediu absorbant este confirmată și de fenomenul de *înroșire interstelară a luminii*. Mediul interstelar constă din particule solide minuscule (granule de praf) cu diametre de ordinul a 0,8 μ. Particulele pot fi formate din *cristale de gheață* sau *granule de grafit* cu amestec din alte substanțe (sub formă de atomi sau molecule). Masa unei granule este de ordinul a 10^{-13} g.

Observațiile arată că numărul de particule pe unitatea de volum *(concentrația)* este sub 10^{-13} particule/cm^3. Deci densitatea prafului interstelar este sub 10^{-26} g/cm^3.

Fenomenul de absorbție interstelară afectează determinarea distanțelor stelare. Astfel, formula (8.63) trebuie înlocuită, în cazul stelelor îndepărtate, cu formula

$$\lg r = 1 + 0{,}2\,(m - M - \Delta m_a), \qquad (13.7)$$

unde Δm_a este o corecție care se aplică magnitudinii aparente observate, m, datorită absorbției interstelare.

Praful interstelar formează un disc, simetric față de planul ecuatorului galactic, a cărui grosime nu depășește 300 pc. Acest disc este neuniform, regiunile cu densitate mare luînd forma nebuloaselor obscure. Pe o distanță de 1000 pc pe raza vizuală se găsesc 8—10 nori interstelari care apar ca nebuloase obscure sau uneori ca nebuloase reflectante (reflectă lumina stelelor apropiate). În brațele spirale ale Galaxiei, nebuloasele de praf formează cu nebuloasele de gaz *complexe de gaz și praf*. Dimensiunile norilor de praf sînt de 5—10 pc, iar densitatea lor este de 10—100 de ori mai mare decît densitatea medie a prafului interstelar. Există și formații mai dense, ca *globulele negre* (de circa 0,1 pc), avînd o densitate de zeci—sute de ori mai mare ca a nebuloaselor obscure.

Probabil că prin contracția norilor interstelari în nebuloase mai dense și apoi în globule se ajunge la formarea stelelor. Totuși, în acest proces un rol mai important decît praful interstelar îl joacă gazul interstelar, care este de 100 de ori mai dens decît praful.

2°. **Gazul interstelar.** Fiind încălzit (deci excitat și ionizat) de stelele apropiate de regiunile în care se găsește, gazul interstelar ilumineaza, iar în regiunile de mare densitate ia forma *nebuloaselor difuze* (ex. Nebuloasa din Orion). Se cunosc circa 400 astfel de nebuloase. În spectrele lor se observă linii strălucitoare de emisie, de unde rezultă natura gazoasă a nebuloaselor difuze. Cele mai intense sînt liniile seriei Balmer, precum și liniile „interzise" ale oxigenului simplu și dublu ionizat și ale altor elemente chimice: carbon, azot etc.

În interiorul nebuloaselor difuze sau în imediata lor vecinătate se găsește întotdeauna o stea, de regulă de clasa spectrală O—B0. Radiația ultravioletă intensă a acestor stele încălzește gazul nebuloasei, producînd excitarea și ionizarea atomilor. Cînd temperatura gazului atinge o valoare de circa 8000 K, se ajunge la o stare de echilibru termic, în care absorbția radiației stelelor este compensată prin emisia în liniile spectrale amintite, mai ales în „liniile interzise".

În unele regiuni întinse ale cerului se observă o iluminare asemănătoare cu cea a nebuloaselor difuze, dar mult mai slabă, fiind măsurabilă numai în linia H_α. Acestea sînt *cîmpurile de hidrogen ale Galaxiei*, care se prezintă sub forma unor nori de gaz ionizat (de radiația stelelor fierbinți), cu o concentrație de 10 particule/cm^3.

Gazul interstelar se poate pune în evidență și prin absorbție, dacă norii de gaz sînt departe de stele. Astfel, în spectrele unor stele (mai ales fierbinți) apar linii spectrale care nu le aparțin lor ci mediului interstelar, numite *linii de absorbție interstelară*. Din studiul lor se determină *densitatea gazului, vitezele relative ale norilor de gaz* etc. Observațiile arată că, în medie, peste tot în Galaxie masa de gaz este proporțională cu masa de praf, gazul fiind de 100 de ori mai abundent, de unde rezultă că norii de praf și norii de gaz reprezintă unele și aceleași obiecte: *nori de materie difuză formați din gaz și praf*.

Observațiile radioastronomice furnizează informații mai numeroase despre gazul interstelar decît observațiile optice, pe această cale deducîndu-se distribuția hidrogenului în Galaxie. Densitatea maximă a hidrogenului este atinsă la 3000—3500 pc de centrul Galaxiei: 0,2 atomi/cm^3, densitatea lui scăzînd spre centru și spre periferie. Hidrogenul este ionizat în proporție de 5% în norii din planul Galaxiei; masa hidrogenului ionizat fiind de 10^8 $\mathcal{M}_\odot$ sau 0,1% din masa Galaxiei. Distribuția hidrogenului neutru se obține studiind radiația radio monocromatică corespunzătoare lungimii de undă de 21 cm a hidrogenului. Observațiile arată că hidrogenul neutru este distribuit neuniform în Galaxie. Densitatea lui crește la anumite distanțe de centru, corespunzătoare brațelor spirale ale Galaxiei. Astfel s-a confirmat și precizat structura spirală a Galaxiei dedusă după distribuția stelelor fierbinți și a nebuloaselor difuze. Polarizarea radiației stelare arată că desfășurarea brațelor spirale are loc după liniile de forță ale cîmpului magnetic galactic.

Materia difuză interstelară poate fi împărțită în două zone: zona H I, a hidrogenului neutru, și zona H II, a hidrogenului ionizat.

CAPITOLUL XIV

ELEMENTE DE ASTRONOMIE EXTRAGALACTICĂ

§ 14.1. CLASIFICAREA GALAXIILOR

Cu ajutorul unor lunete sau telescoape mici se pot pune în evidență corpuri cerești cu aspect de nebuloasă. Utilizînd telescoape puternice, acestea se dovedesc a fi formate din stele, adică sînt sisteme stelare gigantice, asemănătoare cu Galaxia noastră. Cea mai apropiată de noi este Galaxia din Andromeda (exceptînd galaxiile satelit ale Galaxiei noastre: Norii lui Magellan și sistemele din Sculptorul și Cuptorul — galaxii pitice). Galaxia din Andromeda mai este cunoscută și sub numele de galaxia M 31 (catalogul Messier) sau de galaxia NGC 224 (Noul Catalog General). Datorită aspectului pe care îl au în instrumentele mici, galaxiile se mai numesc, impropriu, și „nebuloase extragalactice".

Galaxiile au o structură asemănătoare cu Galaxia noastră: prezintă un nucleu central, densitatea stelară scade de la centru spre periferie și multe dintre ele posedă brațe spirale. Ele se împart în trei clase: galaxii neregulate, galaxii spirale (normale și barate) și galaxii eliptice (fig. 14.1).

(1) *Galaxii neregulate* (*I*). La acestea nucleul central este puțin evident sau lipsește cu totul. Ele nu prezintă o structură simetrică. Forma neregulată este datorată rotației rapide. Au spectre de tipul $A - F$ și se consideră că sînt galaxii tinere. Așa sînt Norii lui Magellan. Clasa *I* conține relativ puține galaxii.

(2) *Galaxii spirale.* Sînt cele mai numeroase. Prezintă un nucleu central și brațe spirale. Galaxiile spirale se împart în două subclase: galaxii spirale normale și spirale barate.

— *Galaxii spirale normale* (*S*). Brațele spirale pleacă direct din nucleu. După gradul de desfacere a brațelor avem tipurile: *Sa, Sb, Sc.* Galaxia noastră și galaxia din Andromeda sînt de tipul *Sb.*

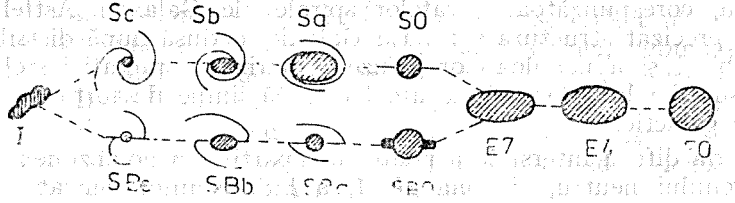


Fig. 14.1. Clasificarea galaxiilor.

— *Galaxii spirale barate* (*SB*). La acestea nucleul pare prelungit cu o „bară" luminoasă, de la capetele căreia pleacă brațele spirale. Și aici avem tipurile *SBa*, *SBb*, *SBc*.

Galaxiile spirale au spectre de tipul *F—G*, cu numeroase linii de emisie, caracteristice nebuloaselor gazoase pe care le conțin. Sînt mai evoluate decît galaxiile din clasa *I*.

Trecerea de la clasa galaxiilor spirale la cea a galaxiilor eliptice se realizează prin tipurile *SO*, *SBO*, care au proprietăți intermediare celor două clase.

(3) *Galaxii eliptice* (*E*). Au forma unor elipsoizi. Această clasă se subîmparte în clasele *E*0, *E*1, ..., *E*7, după turtire. Au spectre de tipul *G—K*, ceea ce înseamnă că ele conțin numeroase stele vîrstnice, din clasele spectrale tîrzii. Sînt cele mai evoluate.

Din punct de vedere evolutiv și cosmologic, un deosebit interes prezintă *galaxiile în interacțiune*, constînd din două sau mai multe sisteme stelare (galaxii), unite prin benzi luminoase de materie sau prin „poduri". În aceste poduri s-au pus în evidență stele fierbinți alb-albastre.

§ 14.2. DETERMINAREA DISTANȚELOR GALAXIILOR

Există numeroase procedee de determinare a distanțelor galaxiilor. Dintre acestea amintim pe cele care utilizează:

— *Cefeidele.* Determinînd din observații perioada unei cefeide aparținînd galaxiei date, din relația perioadă-luminozitate (fig. 13.5) obținem magnitudinea absolută *M*. Măsurînd magnitudinea aparentă (medie) *m*, relația

$$\lg r = 1 + 0{,}2(m - M) \tag{14.1}$$

determină distanța *r* a galaxiei. În determinări precise, în relația (14.1) trebuie introdus un termen corectiv, Δm_a, care ține seama de absorbția interstelară și intergalactică.

— *Novele.* Se măsoară *m* în maximul de strălucire și considerînd că în medie $M_{max} = -9^m$, rezultă *r*.

— *Roiurile globulare.* Se măsoară *m* pentru un roi globular al galaxiei considerate. Observațiile arată că la roiurile globulare avem $M = -9^m$ — $-9^m{,}5$; deci rezultă *r*.

— *Deplasarea spre roșu.* Acest fenomen constă în faptul că, pentru galaxiile îndepărtate, liniile spectrale apar în spectrele lor deplasate spre roșu. Din observații se determină deplasarea relativă a liniilor spectrale $\Delta\lambda/\lambda$. Interpretînd această deplasare ca un efect Doppler, rezultă viteza radială a galaxiei, din

$$v_r = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \tag{14.2}$$

Determinînd mărimea $\lg(c\,\Delta\lambda/\lambda)$ și magnitudinea aparentă *m* pentru diferite galaxii, observațiile arată că avem o relație liniară între cele două mărimi (fig. 14.2). Considerînd că galaxiile (de același tip) au, în medie, aceeași magnitudine absolută *M*, din formulele (14.1) și (14.2) rezultă

că relația obținută este o relație liniară între lg v_r și lg r. De aici Hubble a dedus între v_r și r relația liniară

$$v_r = Hr \qquad (14.3)$$

Întrucît observațiile arată că $v_r = 0$, rezultă relația

$$v = Hr \qquad (14.4)$$

— numită *formula lui Hubble*.

În (14.4) H este o constantă, numită constanta lui Hubble. Dacă v este dat în km/s, iar r în Mpc, atunci valoarea ei este, după determinări recente, $H = 50 - 75$ km/s · Mpc.

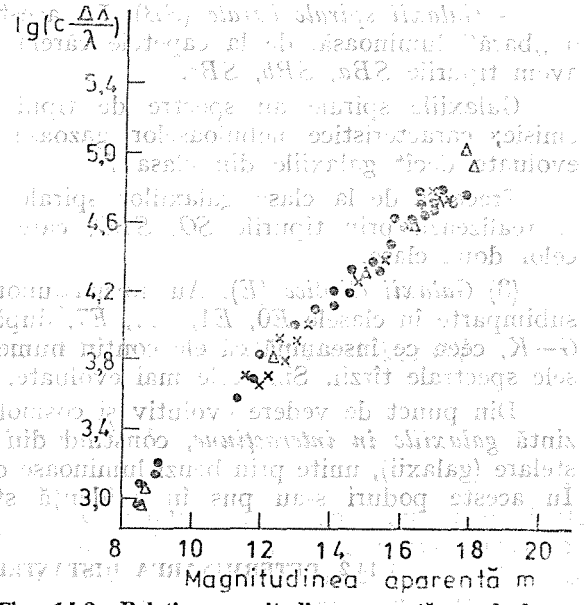


Fig. 14.2. Relația magnitudine aparentă — deplasare spre roșu.

Măsurînd, pentru o galaxie necunoscută, deplasarea spre roșu, formulele (14.2) — (14.4) permit determinarea distanței r.

Pentru galaxiile îndepărtate, se ia în considerare efectul Doppler relativist. Formula clasică (14.2) este înlocuită, în acest caz, cu relația

$$1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{1/2} \qquad (14.5)$$

S-au observat, astfel, galaxii și quasari pentru care formula (14.5) dă viteze ce ajung pînă la $0{,}9c$ (c fiind viteza luminii).

Pentru galaxiile foarte îndepărtate trebuie să se ia în considerare efectul de curbare a spațiului, care nu mai este euclidian.

§ 14.3. PROPRIETĂȚILE FIZICE ALE GALAXIILOR

Galaxiile, chiar și cele de același tip, pot diferi mult după dimensiunile, luminozitățile, masele lor, ca și după alte caracteristici fizice.

(1) *Dimensiunile liniare*. Măsurînd diametrul aparent al unei galaxii și cunoscînd distanța ei, diametrul ei liniar se poate determina cu o formulă analogă cu (10.16). Galaxiile spirale și eliptice cele mai mari au diametre de 25—35 kpc. Există și galaxii pitice, avînd dimensiuni cu un ordin mai mic.

(2) *Luminozitățile*. Cunoscînd distanța r și măsurînd magnitudinea aparentă m, din relația (14.1) rezultă magnitudinea absolută M, cu care se poate calcula luminozitatea galaxiei considerate, utilizînd formula (10.24). Galaxiile cele mai mari au magnitudinea absolută fotografică $M_{pg} = -21^m$. Galaxiile de tip E și S au în medie $M_{pg} = -19^m$, ceea

ce corespunde luminozității a patru miliarde de sori. Galaxiile neregulate sînt de 100 de ori mai slabe.

(3) *Rotațiile galaxiilor.* Comparînd deplasarea liniilor spectrale în diferite părți ale aceleiași galaxii sau măsurînd lărgirea liniilor spectrale, se deduce (pe baza efectului Doppler) că galaxiile execută mișcări de rotație. Perioadele de rotație ale părților exterioare sînt de ordinul a 10^8 ani. Nucleele galaxiilor se rotesc cu o aceeași viteză unghiulară (ca și corpurile rigide). Galaxiile se rotesc în sensul înfășurării brațelor spirale. Forma brațelor este determinată de efectul rotației diferențiale.

(4). *Masele.* Se determină pe baza vitezelor de rotație ale părților lor exterioare. Se poate considera, cu o oarecare aproximație, că rotația are loc după legile lui Kepler. Egalînd accelerația centrifugă $a_c = v^2/R$ (v — viteza liniară de rotație, R — raza galaxiei) cu accelerația gravitațională $g = G\mathcal{M}/R^2$, rezultă pentru masa galaxiei, $\mathcal{M}$, expresia

$$\mathcal{M} = \frac{Rv^2}{G} \qquad (14.6)$$

Masele galaxiilor duble se pot determina, în principiu, la fel ca masele stelelor duble (spectroscopice), după vitezele mișcărilor lor relative, care se deduc din deplasările Doppler ale liniilor spectrale.

Majoritatea galaxiilor observate au mase între $10^9 - 10^{12}$ mase solare. Excluzînd galaxiile pitice, observațiile arată că masa medie a galaxiilor este de ordinul a 10^{11} mase solare sau $2 \cdot 10^{41}$ kg.

(5) *Nucleele galaxiilor.* Deși joacă un rol important în structura și evoluția galaxiilor, nucleele lor sînt puțin studiate. Ele constau din stele și nori de plasmă. Pe lîngă linii de absorbție, spectrele lor prezintă linii de emisie intense. Prin efectul Doppler s-au pus în evidență curenți de gaze în nuclee. După caracterul acestor curenți (sau după tipul activității nucleelor), există diferite tipuri de galaxii: Seyfert, eruptive etc.

§ 14.4. RADIOGALAXII. QUASARI

1°. **Radiogalaxii.** Galaxiile, ca și stelele, emit radiații electromagnetice pe toate lungimile de undă, deci și în domeniul radio. La majoritatea galaxiilor obișnuite, radiația radio reprezintă o fracțiune neînsemnată din luminozitatea totală (integrală) a galaxiei. Există însă galaxii la care fluxul de radiație în domeniul radio este comparabil cu fluxul în domeniul optic. Asemenea galaxii se numesc *radiogalaxii.*

De exemplu, radiogalaxia Lebăda—A (Cygnus—A) — care este o sursă puternică de unde radio — emite în domeniul radio un flux de șase ori mai mare decît cel din domeniul optic. Ea se găsește la 170 Mpc. Se cunosc cîteva zeci de radiogalaxii care s-au identificat optic cu galaxii gigante ($M_{pg} = -20^m \div -21^m$), în majoritatea cazurilor galaxii eliptice.

Domeniul care emite unde radio, de obicei, depășește în dimensiuni galaxia observată optic. Unele radiogalaxii sînt duble (optic observîndu-se uneori o singură componentă). Se consideră că aceste unde radio provin dintr-un nor de particule rapide, care a apărut în urma unei erupții asemănătoare acelora care se observă în galaxiile eruptive. Energia unei asemenea erupții poate atinge 10^{53} J, fiind de zeci de miliarde de ori mai mare decît energia erupției unei supernove. Particulele care emit unde

radio sînt electroni relativiști, a căror mișcare este frînată în cîmp magnetic.

Se consideră că vîrsta radiogalaxiilor este de numai cîteva milioane de ani.

2°. **Quasari.** În anul 1963, unele surse de unde radio, cu diametre unghiulare sub 1″ s-au identificat cu obiecte avînd aspect stelar în domeniul optic. În anii următori, s-au descoperit peste 200 asemenea obiecte (uneori înconjurate de o aureolă difuză). Acestea au fost numite *surse radio cvasistelare*, sau prescurtat *quasari*. În anul 1965, au fost descoperite obiecte optice asemănătoare, dar care nu posedă radiație radio intensă, fiind numite *galaxii cvasistelare*, sau prescurtat *quasagi*.

În spectrele quasarilor se observă linii de emisie caracteristice nebuloaselor difuze și, uneori, linii de absorbție de rezonanță. Identificarea liniilor spectrale este dificilă deoarece prezintă o mare deplasare spre roșu (s-au observat quasari la care $\Delta\lambda/\lambda \simeq 3$). Din formula (14.5) rezultă viteze de recesie ale quasarilor de ordinul $0{,}9c$. Formula (14.4) dă pentru quasari distanțe enorme, quasarii fiind obiectele cosmice cele mai îndepărtate cunoscute pînă în prezent. Datorită quasarilor astăzi este posibilă studierea proprietăților materiei pînă la distanțe de ordinul a 10^{10} a.l., care în scara timpului corespund unor intervale de ordinul a 10^{10} ani.

Cel mai apropiat quasar este 3 C 273 (numărul 273 în al treilea Catalog de la Cambridge), care se observă ca un obiect de magnitudinea 13, fiind situat la o distanță de 500 Mpc de noi. Galaxiile gigante la această distanță apar de magnitudinea 18. Prin urmare quasarii emit în domeniul optic o energie de 100 de ori mai mare decît cele mai strălucitoare galaxii. Ei emit un flux puternic de radiații și în domeniul radio, comparabil cu al radiogalaxiilor.

Observațiile indică pentru quasari dimensiuni mici (sub 100 pc), în timp ce debitul de energie emis este foarte mare. Înseamnă că în quasari este prezent un mecanism foarte eficient de eliberare a energiei.

Natura fizică a quasarilor este încă necunoscută. Interpretarea proprietăților lor extraordinare prezintă mari dificultăți. Dacă deplasarea liniilor lor spectrale este, în adevăr, un efect Doppler, iar quasarii sînt obiecte foarte îndepărtate, atunci înseamnă că avem de-a face cu niște surse grandioase de energie, a căror natură trebuie explicată. Există diferite ipoteze cu privire la natura quasarilor. Cea mai răspîndită (în bună concordanță cu datele observaționale) este ipoteza că quasarii reprezintă un tip particular de galaxii, care participă împreună cu galaxiile obișnuite la expansiunea generală a Universului observabil. Mulți astrofizicieni consideră că energia lor este emisă în procesul de *acreție* a materiei pe găuri negre masive.

§ 14.5. DISTRIBUȚIA SPAȚIALĂ A GALAXIILOR

Ca și stelele, galaxiile sînt grupate în sisteme de galaxii, nefiind distribuite uniform în spațiu. Observațiile arată că există galaxii duble, triple etc. *Grupul de galaxii* este un sistem de galaxii conținînd cîteva zeci de membri. Galaxia noastră face parte din *grupul local de galaxii*, care include trei galaxii spirale gigante (Galaxia noastră, galaxia din Andromeda și galaxia din Triunghiul), precum și vreo 15 galaxii pitice, eliptice și neregulate, dintre care cele mai mari sînt Norii lui Magellan.

Există sisteme cu o populație mai numeroasă, numite *roiuri de galaxii*, care conțin sute sau mii de galaxii. În medie, dimensiunile roiurilor de galaxii sînt de circa 3 Mpc. Ca și roiurile stelare, roiurile de galaxii pot fi *deschise* (neregulate) și *globulare* (sferice). Roiurile deschise nu au o formă regulată și prezintă o slabă concentrare a galaxiilor spre centru. Așa este roiul de galaxii din constelația Fecioara, situat la 11 Mpc de noi. Roiurile globulare prezintă simetrie sferică, au o structură mai compactă decît cele deschise și prezintă o pronunțată concentrare a galaxiilor spre centru. Un exemplu de roi globular este roiul din constelația Părul Berenicei, conținînd peste 30 000 de galaxii, situat la 70 Mpc de noi.

Roiurile de galaxii sînt, la rîndul lor, distribuite neuniform. Unii astronomi consideră că grupurile și roiurile de galaxii din jurul nostru formează un supersistem grandios, numit *Supergalaxie*. Masa Supergalaxiei noastre este de circa 10^{15} mase solare iar diametrul de circa 50 Mpc.

Unii specialiști consideră că mai există și alte supergalaxii, în afara Supergalaxiei noastre, și că în prezent în Metagalaxie ar fi puse în evidență vreo douăzeci de supergalaxii. Distanța dintre două supergalaxii depășește numai cu puțin dimensiunile lor. Deocamdată, însă, problema existenței supergalaxiilor este destul de controversată.

§ 14.6. NOȚIUNI DE COSMOLOGIE

Partea astronomiei care se ocupă cu studiul proprietăților fizice ale Universului considerat ca un tot unitar se numește *cosmologie*. În particular ca studiază regiunea Universului actual observabilă, numită *Metagalaxie*, interpretînd datele de observație corespunzătoare.

Cosmologia este o știință inter- și pluridisciplinară. Pe lîngă rezultatele astronomiei și astrofizicii, ea utilizează și rezultatele altor științe: în primul rînd teoria relativității. Această teorie arată că proprietățile continuumului spațiu-timp sînt influențate de prezența unor mase mari. Proprietățile spațiului euclidian, cu care sîntem obișnuiți, valabile la scară macrocosmică, nu mai sînt valabile la scară megacosmică. În apropierea maselor mari, proprietățile spațiului se modifică; spațiul se *curbează*.

Curbura spațiului în vecinătatea unor stele individuale, de exemplu în vecinătatea Soarelui, este foarte mică. Datorită curbării spațiului, raza de lumină a unei stele, care trece prin apropierea Soarelui, își va schimba direcția. Fenomenul a fost verificat cu ocazia eclipselor totale de Soare, cînd s-au determinat pozițiile stelelor din apropierea discului solar. Observațiile au pus în evidență devieri ale pozițiilor stelelor, în concordanță cu teoria, dar efectul astfel produs este mic.

Dar masele foarte mari: supergalaxiile sau totalitatea galaxiilor din Metagalaxie produc o curbare apreciabilă a spațiului. Existența unei curburi apreciabile a spațiului va influența atît proprietățile fizice ale Universului, cît și evoluția sa.

Însăși punerea problemei determinării, pe baza legilor teoriei relativității, a proprietăților spațiului și timpului pentru o distribuție arbitrară a maselor este extrem de dificilă. De aceea, cosmologia teoretică a cercetat mai întîi anumite scheme aproximative de structură și evoluție, numite *modele de Univers*, la care ne vom referi mai departe.

Modelele cele mai simple se bazează pe următoarele două ipoteze: (1) La scară mare materia din Univers este distribuită uniform *(omo-*

genitatea Universului). (2) Proprietățile spațiului sînt aceleași în toate direcțiile *(izotropia Universului).* Se poate arăta că spațiul înzestrat cu aceste proprietăți are o anumită curbură (finită). Modelele construite pe aceste ipozete se numesc *modele de Univers omogen și izotrop.*

Proprietățile unui anumit model de Univers rezultă din soluțiile ecuațiilor gravitației ale lui Einstein. În cazul Universului omogen și izotrop, se poate arăta că distanța dintre două neomogenități oarecare (dintre două galaxii, care aici pot fi considerate ca puncte materiale) nu poate rămîne constantă (abstracție făcînd de mișcările haotice individuale). Prin urmare, Universul trebuie sau să se contracte sau să se dilate. Ultima posibilitate este în concordanță cu datele de observație, conform formulei (14.4) a lui Hubble, care exprimă tocmai dilatarea sau *expansiunea Universului.* În adevăr, teoria arată că viteza îndepărtării relative a două puncte oarecare din Univers este cu atît mai mare, cu cît este mai mare distanța dintre ele. Pentru distanțe relativ mici, această dependență este liniară, de forma relației (14.4), dată de observații, deci coeficientul de proporționalitate din relația teoretică se poate identifica cu constanta lui Hubble, H.

În general, modelele de Univers arată că distanța dintre două corpuri (puncte) oarecare este funcție de timp. Forma acestei funcții depinde de curbura spațiului. Dacă curbura este negativă, atunci Universul se dilată tot timpul. Dacă curbura este nulă (spațiu euclidian), atunci dilatarea se încetinește cu timpul, iar viteza de dilatare tinde la zero pentru $t \to \infty$. În sfîrșit, dacă curbura este pozitivă, dilatarea Universului încetează la un anumit moment, după care începe contracția. În ultimul caz spațiul este finit, adică are la orice moment un volum finit determinat, un număr finit de stele, galaxii etc. Acest Univers finit, *oscilant,* este fără margini. (Ca analog bidimensional al acestui Univers finit și nemărginit se poate considera suprafața unei sfere care se dilată.)

Una din premizele dezvoltării cosmologiei moderne o constituie elaborarea *geometriei neeuclidiene,* la baza căreia stau lucrările lui N. Lobacevski și ale lui J. Bolyai. Independent unul de altul, ei au construit o nouă geometrie, geometria hiperbolică.

Valoarea curburii spațiului pentru Universul omogen și izotrop depinde de valoarea densității medii a materiei, ρ. Dacă densitatea este mai mică decît o anumită valoare critică, ρ_{cr} ($\rho < \rho_{cr}$), curbura este negativă, deci este valabil primul caz amintit mai înainte. Dacă $\rho = \rho_{cr}$, curbura este nulă, fiind valabil al doilea caz. În sfîrșit, dacă $\rho > \rho_{cr}$, curbura este pozitivă, realizîndu-se al treilea caz.

Densitatea critică, ρ_{cr}, se exprimă prin constanta lui Hubble, H, și prin constanta gravitațională, G, astfel

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{14.7}$$

Punînd aici valoarea $H = 75$ km/s · Mpc și valoarea cunoscută a lui G, rezultă $\rho_{cr} = 10^{-29}$ g/cm^3. Luînd în considerare toate masele cunoscute din Metagalaxie și cunoscînd raza ei, se poate obține o evaluare pentru densitatea medie observată a materiei din Universul (observabil) accesibil, ρ_{obs}. Rezultă $\rho_{obs} \simeq 5 \cdot 10^{-31}$. Aceasta trebuie considerată ca o limită inferioară, deoarece nu este cunoscută masa mediului invizibil dintre galaxii. Chiar admițînd că ρ_{obs} este cu un ordin, un ordin și jumătate de mărime mai mare, s-ar putea scrie $\rho_{obs} \lesssim \rho_{cr}$. Adică, curbura Uni-

versului este sau apropiată de zero sau negativă. La o concluzie asemănătoare se ajunge din studiul vitezelor de recesie ale obiectelor celor mai îndepărtate (galaxii, radiogalaxii, quasari), obținîndu-se o încetinire a vitezei de expansiune a Universului cu timpul. Totuși, precizia observațiilor actuale nu permite o alegere certă între cele trei posibilități indicate.

După cum am văzut, constanta lui Hubble, H, joacă un rol deosebit în teoria Universului omogen și izotrop. Această constantă are o interpretare fizică interesantă, care decurge din observația că inversa ei $1/H$ are dimensiunea timp, avînd valoarea $1/H = 13{,}3-20$ miliarde de ani (timpul Hubble). Timpul necesar pentru dilatarea Metagalaxiei de la o stare „inițială" la starea actuală (timpul Friedmann) este ceva mai scurt: 10 — 15 miliarde de ani. De aici se degajă ideea că în trecut Metagalaxia a trecut printr-o stare deosebită, avînd probabil o densitate foarte mare.

În anul 1965, prin metodele radioastronomiei, a fost descoperită *radiația cosmică termică remanentă*, al cărei spectru continuu (Planck) corespunde temperaturii de 2,7 K. Intensitatea acestei radiații este foarte mică și aceeași în toate direcțiile (radiație izotropică). Această descoperire se consideră a fi o confirmare a faptului că Universul (accesibil) s-a găsit, într-adevăr, cîndva într-o anumită stare deosebită. Radiația amintită s-a numit *remanentă (relictă)*, deoarece ea trebuie să fie un *reziduu* al radiației emise de către Univers în epoca în care avea o mare densitate și era opac față de radiația proprie. Calculele arată că aceasta trebuie să fi avut loc la o densitate $\rho > 10^{-20}$ g/cm^3 (concentrația medie a atomilor de ordinul a 10^4 cm^{-3}), adică atunci cînd densitatea depășea de miliarde de ori densitatea actuală. În epoca opacității sale, toate distanțele din Univers erau de circa 1000 de ori mai mici decît în prezent (deoarece $\rho \sim r^{-3}$). Cu același factor trebuie reduse și lungimile de undă. Formula lui Wien $\lambda_m T = \text{const.}$, pentru $T \simeq 3$ K, dă $\lambda_m = 1$ mm. În timpul cînd Universul era opac, lungimea de undă corespunzătoare era $\lambda_m = 1$ μ, căreia îi corespunde o temperatură $T \simeq 3000$ K. Astfel, existența radiației termice remanente este o indicație a faptului că în trecut Universul a avut atît o densitate mare, cît și o temperatură mare *(modelul de Univers „fierbinte")*.

Problema dacă Universul a fost cîndva în stări cu o densitate și mai mare (și avînd respectiv o temperatură mult mai mare) s-ar putea lămuri cu ajutorul *radiației neutrinice remanente*. Pentru neutrini opacitatea Universului apare la densități de ordinul a 10^7 g/cm^3. Asemenea densități ar fi putut exista numai în stadii foarte timpurii de dezvoltare a Universului (accesibil). Neutrinii relicți ar trebui să posede o energie foarte mică, de ordinul a 10^{-4} eV, de aceea înregistrarea lor este, din păcate, puțin probabilă în viitorul apropiat. Înregistrarea lor ne-ar apropia mult de momentul exploziei Universului accesibil (teoria *Big Bang*).

Din cele arătate mai sus rezultă că, în principiu, cosmologia permite formarea unei imagini despre legitățile cele mai generale ale structurii și dezvoltării Universului. Este lesne de înțeles ce valoare imensă are această ramură a astronomiei pentru formarea unei concepții științifice corecte, materialist-dialectice despre Univers. Cosmologia permite studiul materiei infinite în timp și spațiu. Studiind legile Universului considerat ca un întreg, cunoaștem mai profund proprietățile materiei, spațiului și timpului. Unele din acestea, de exemplu proprietățile spațiului fizic real, ca și ale timpului la scară mare, pot fi studiate numai în cadrul cosmologiei. De aceea rezultatele ei au o valoare excepțională nu numai pentru astronomie și

fizică, ci și pentru filozofie, care dobîndește astfel un vast material pentru generalizarea legităților lumii materiale.

Preocupări în domeniul cosmologiei au existat și există și în țara noastră. În acest sens menționăm că profesorul Octav Onicescu, (1892—1983), în cadrul teoriei sale *mecanica invariantivă*, a elaborat o ipoteză cosmologică originală, în care deduce legea lui Hubble din considerații pur invariantive. Mai mulți specialiști români au dezvoltat aceste rezultate, Ieronim Mihăilă de la Universitatea din București demonstrînd că pe baza mecanicii invariantive se poate explica avansul periheliului planetei Mercur (la fel de bine ca și pe baza teoriei relativității generale).

CAPITOLUL XV

ORIGINEA ȘI EVOLUȚIA CORPURILOR CEREȘTI

Partea astronomiei care studiază originea și evoluția corpurilor cerești se numește *cosmogonie*. Problemele cosmogoniei prezintă un mare interes filozofic, fiind strîns legate de formarea concepției științifice, materialist-dialectice despre lume. Acestea sînt și problemele cele mai grele ale astronomiei, deoarece observațiile ne furnizează date pe un interval infim de timp în comparație cu vîrstele cosmice.

Există două căi de abordare a problemelor cosmogonice:

— *Calea teoretică* pleacă de la legile generale ale fizicii și încearcă să calculeze teoretic drumul evolutiv pe care a trebuit să-l parcurgă un anumit corp ceresc pentru a ajunge la starea actuală, ca și cel pe care trebuie să-l parcurgă în viitor.

— *Calea observațională*, care compară caracteristicile observaționale ale corpurilor cerești din aceeași clasă, căutînd să stabilească o succesiune evolutivă pentru clasa respectivă. A doua cale se poate aplica numai în cazul unor obiecte numeroase de același fel: stele, roiuri de stele, galaxii etc. Pentru a obține rezultate în concordanță cu realitatea, cele două căi se îmbină, completîndu-se reciproc.

§ 15.1. VÎRSTA CORPURILOR CEREȘTI

1°. **Vîrsta Pămîntului.** Se determină prin analiza conținutului de izotopi radioactivi care se găsesc în scoarța terestră. Fiecare izotop radioactiv este caracterizat printr-un anumit timp de înjumătățire, τ. Uraniul greu, ^{238}U, se dezintegrează în plumb, ^{206}Pb ($\tau = 4{,}5 \cdot 10^9$ ani). Prin dezintegrarea uraniului ușor, ^{235}U, se obține un alt izotop al plumbului, ^{207}Pb ($\tau = 7{,}1 \cdot 10^8$ ani). Un al treilea izotop al plumbului, ^{208}Pb, se obține prin dezintegrarea thoriului, ^{232}Th ($\tau = 1{,}4 \cdot 10^{10}$ ani). Rubidiul, ^{87}Rb, se dezintegrează în stronțiu, ^{87}Sr ($\tau = 4{,}7 \cdot 10^{10}$ ani), iar potasiul ^{40}K se transformă în argon, ^{40}Ar ($\tau = 1{,}3 \cdot 10^9$ ani).

Determinîndu-se proporțiile izotopilor radioactivi enumerați față de produsele finale de dezintegrare (din analiza a numeroase probe de roci) și cunoscînd timpurile de înjumătățire corespunzătoare, se poate evalua vîrsta de formare (solidificare) a rocilor, care este de circa $4 \cdot 10^9$ ani. Vîrsta Pămîntului însuși este ceva mai mare, fiind evaluată la cel puțin $(4{,}5 \pm 0{,}3) \cdot 10^9$ ani.

Prin analize similare, pentru meteoriți și pentru Lună (pe baza mostrelor de rocă lunară recoltate în cadrul programului Apollo), s-a obținut aproximativ aceeași vîrstă.

2°. **Vîrsta Soarelui.** O evaluare pentru această vîrstă se obține astfel. Luminozitatea Soarelui este $L_\odot = 3{,}8 \cdot 10^{26}$ W, iar masa lui, $\mathcal{M}_\odot \simeq$ $\simeq 2 \cdot 10^{30}$ kg. Energia Soarelui se obține, prin reacții termonucleare, în urma transformării hidrogenului în heliu. După cum am văzut în cap. XII, diferența dintre masa care iese din reacție și cea care intră, la 1 kg de hidrogen, este de circa 0,007 kg, adică 0,7%. Pe de altă parte, numai circa 10% din masa solară (situată în centrul său) participă la reacțiile termonucleare. Considerînd că Soarele inițial a fost format numai din hidrogen și că luminozitatea Soarelui a rămas practic constantă, pe baza formulei lui Einstein se poate defini *timpul nuclear* al Soarelui, $t_{n\odot}$, prin relația

$$t_{n\odot} = \frac{7 \cdot 10^{-4} \mathcal{M}_\odot c^2}{L_\odot} \simeq 10^{10} \text{ ani} \qquad (15.1)$$

Ținînd seama de conținutul actual de heliu din Soare și de faptul că $L_\odot$ nu variază cu timpul decît foarte lent, se evaluează vîrsta Soarelui la 5 miliarde de ani. Această valoare este în bună concordanță cu vîrstele obținute pentru Pămînt, Lună și pentru meteoriți (deci pentru planete). De aici se degajă ideea că sistemul nostru solar s-a format printr-un proces unic, acum 5 miliarde de ani.

3° **Vîrsta stelelor.** Se poate defini timpul nuclear al unei stele printr-o formulă analogă cu (15.1). La stele masive acesta este de milioane de ani, iar la cele cu masă mică depășește vîrsta Galaxiei și chiar a Universului observabil. Vîrsta actuală a diferitelor stele depinde de stadiul evolutiv în care se găsesc.

Din cele de mai sus se desprinde ideea, general acceptată, că stelele au vîrste diferite, iar calcule exacte arată că acestea sînt cuprinse între 10^6 ani și 10^{10} ani. Acest fapt este confirmat și observațional. Stelele fierbinți *O*, *B* din asociații stelare și din unele roiuri deschise au vîrste de ordinul milioanelor de ani, fiind considerate stele tinere. Dimpotrivă, stelele din roiurile globulare sînt stele vîrstnice, avînd vîrste de circa 10 miliarde de ani.

4° **Vîrsta galaxiilor.** Se consideră că Galaxia noastră, ca și alte galaxii, are o vîrstă de ordinul roiurilor globulare — cele mai vîrstnice obiecte cerești cunoscute — adică de circa 10 miliarde de ani.

§ 15.2. ORIGINEA ȘI EVOLUȚIA STELELOR

1° **Contracția gravitațională.** În prezent este aproape unanim acceptată ipoteza că stelele se formează din materia difuză interstelară.* În favoarea acestei concepții pledează faptul că stelele tinere sînt situate în brațele Galaxiei noastre, acolo unde se observă și materia difuză formată din gaz și praf interstelar. Această materie este reținută aici de către cîmpul magnetic galactic, cîmp care, însă, este prea slab pentru a putea reține stelele un timp îndelungat. De aceea stele vîrstnice nu se găsesc, în general, în brațele Galaxiei, ci în componenta sferică.

* Academicianul sovietic V.A. Ambarțumian susține că, dimpotrivă, stelele se formează prin dilatarea unor corpuri prestelare hiperdense de natură necunoscută (care nu se observă direct).

Stelele tinere constituie adesea *agregate de stele*, în care intră mii de stele și o mare cantitate de gaz și praf (de exemplu, agregatul din Orion).

Modul cum se formează stelele din materia difuză nu este pe deplin elucidat. Se consideră că procesul de formare decurge aproximativ astfel. Dacă masa materiei difuze, formată din gaz și praf, dintr-un anumit volum (nor cosmic), depășește (datorită unei cauze oarecare) o anumită valoare critică, atunci materia din acest volum începe să se contracte sub acțiunea forțelor de atracție. Acest proces se numește *contracție gravitațională* (sau *condensare gravifică*) și reprezintă primul stadiu în evoluția unei stele. Mărimea masei critice depinde de densitate, temperatură și masa medie moleculară.

Regiunile cu materie difuză relativ densă se evidențiază observațional sub forma *globulelor negre* și a așa-numitelor *trompe de elefant*, formațiuni compacte, opace, de materie neorganizată care apar pe fondul nebuloaselor luminoase (globulele au o formă regulată, ovală; trompele au o formă neregulată). Aceste formațiuni sînt, probabil, strămoșii stelelor.

În cursul procesului de contracție gravitațională, particulele de praf și moleculele de gaz cad spre centrul norului. Energia potențială gravitațională se transformă în energie cinetică, iar aceasta în căldură, în urma ciocnirilor. Norul se încălzește treptat, iar după ce temperatura depășește circa 2000 K, granulele de praf se evaporă și moleculele se disociază. Temperatura crește în continuare, iar atunci cînd atinge valori de ordinul zecilor de mii de grade K, se produce fenomenul de ionizare a materiei. Procesul de contracție gravitațională se accelerează cu timpul, iar în anumite condiții fizice (dacă masa norului e mare), acest proces ia forma violentă de *prăbușire gravitațională* (colaps gravitațional). Tempreatura norului crescînd, acesta începe să radieze, astfel norul se transformă într-o *protostea*.

În momentul formării ei, protosteaua se găsește mult la dreapta și în partea de jos a diagramei $H-R$, avînd o temperatură mică și o luminozitate mică (fig. 15.1). Pe măsura contracției, temperatura și luminozitatea cresc, pînă cînd protosteaua ajunge în poziția A (fig. 15.1), în care începe contracția rapidă. În cursul acestei faze protosteaua se deplasează în diagrama $H-R$ din poziția A în poziția B, unde contracția rapidă este frînată.

Pe porțiunea BC a traseului evolutiv (fig. 15.1), contracția protostelei este lentă. Atunci cînd în centru temperatura atinge cîteva milioane de grade, încep reacțiile termonucleare. Mai întîi are loc arderea deuteriului, litiului, beriliului, borului. La $T \geqslant 5 \cdot 10^6$K încep reacțiile hidrogenului, pentru care eliberarea de energie este suficient de mare pentru a opri complet contracția gravitațională. Astfel, în punctul C (fig. 15.1), protosteaua ajunge într-o fază de echilibru, în care presiunea internă echilibrează efectul gravitației. În momentul cînd se atinge această fază, protosteaua se transformă într-o stea de pe secvența principală, care eliberează energie

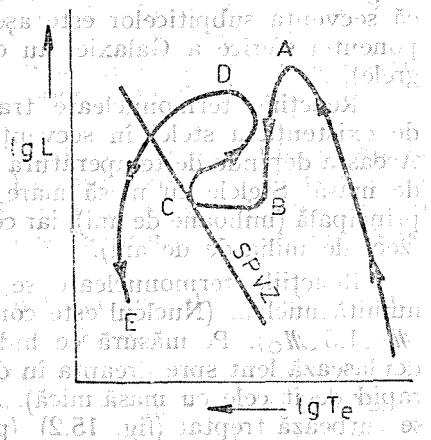


Fig. 15.1. Traseul evolutiv pentru o stea de o masă solară.

prin arderea hidrogenului (prin lanțul proton-proton, dacă $\mathcal{M} < 1{,}5\ \mathcal{M}_\odot$; sau prin ciclul carbon-azot, dacă $\mathcal{M} \geqslant 1{,}5\ \mathcal{M}_\odot$).

Poziția secvenței principale în diagrama $H-R$ la sfîrșitul fazei de contracție gravitațională se numește *secvență principală de vîrstă zero* (*SPVZ* — fig. 15.1). Timpul contracției gravitaționale — relativ scurt — depinde de masa protostelei, fiind mai mic la stele masive (conform tabelului 15.1).

2° **Stadiul de stea a secvenței principale.** Acesta este al doilea stadiu în evoluția unei stele. O stea rămîne un timp îndelungat în acest stadiu — cea mai mare parte a vieții sale (tabelul 15.1). În secvența principală steaua radiază energia furnizată de reacțiile termonucleare (sursa principală de energie este arderea hidrogenului).

Tabelul 15.1

Timpul contracției gravitaționale și timpul existenței stelelor în secvența principală

Clasa spectrală	Masa ($\mathcal{M}_\odot=1$)	Raza ($R_\odot=1$)	Luminozitatea ($L_\odot=1$)	Timpul (ani)	
				Contracția gravitațională	Existența în secvența principală
B0	17,0	9,0	30 000	$1{,}2\cdot10^5$	$8\cdot10^6$
B5	6,3	4,2	1000	$1{,}1\cdot10^6$	$8\cdot10^7$
A0	3,2	2,8	100	$4{,}1\cdot10^6$	$4\cdot10^8$
A5	1,9	1,5	12	$2{,}2\cdot10^7$	$2\cdot10^9$
F0	1,5	1,25	4,8	$4{,}2\cdot10^7$	$4\cdot10^9$
F5	1,3	1,24	2,7	$5{,}7\cdot10^7$	$6\cdot10^9$
G0	1,02	1,02	1,2	$9{,}4\cdot10^7$	$1{,}1\cdot10^{10}$
Soarele	1,00	1,00	1,00	$1{,}1\cdot10^8$	$1{,}3\cdot10^{10}$
G5	0,91	0,92	0,72	$1{,}5\cdot10^8$	$1{,}7\cdot10^{10}$
K0	0,74	0,74	0,35	$2{,}3\cdot10^8$	$2{,}8\cdot10^{10}$
K5	0,54	0,54	0,10	$6{,}0\cdot10^8$	$7{,}0\cdot10^{10}$

Aici steaua este într-o fază de echilibru, în care masa, raza și lumiozitatea sînt aproape constante (luminozitatea variază cu cîteva zecimi de magnitudine în milioane—miliarde de ani). Poziția pe care o ocupă o stea în secvența principală depinde de masa ei. Poziția secvenței principale în diagrama $H-R$ variază cu compoziția chimică. Astfel se explică faptul că secvența subpiticelor este așezată sub secvența principală (stelele componentei sferice a Galaxiei au o abundență relativă scăzută de elemente grele).

Reacțiile termonucleare transformă hidrogenul în heliu, iar timpul de existență a stelei în secvența principală depinde de viteza reacțiilor. Aceasta depinde de temperatura interiorului stelei, care la rîndul ei depinde de masă. Stelele cu masă mare rămîn un timp relativ scurt în secvența principală (milioane de ani), iar cele cu masă mică rămîn un timp îndelungat (zeci de miliarde de ani).

Reacțiile termonucleare se desfășoară în regiunea centrală a stelei numită nucleu. (Nucleul este convectiv dacă $\mathcal{M} \geqslant 1{,}5\ \mathcal{M}_\odot$ și radiativ dacă $\mathcal{M} < 1{,}5\ \mathcal{M}_\odot$). Pe măsură ce hidrogenul se consumă în nucleu, steaua se deplasează lent spre dreapta în diagrama $H-R$ (stelele cu masă mare mai rapid decît cele cu masă mică). Astfel secvența principală se deplasează și se curbează treptat (fig. 15.2) (pentru un grup de stele formate simultan).

Cînd hidrogenul din nucleu este în întregime transformat în heliu, se încheie al doilea stadiu de evoluție al stelei. Reacțiile de transformare a hidrogenului în heliu continuă într-un înveliș în jurul nucleului. Calculele arată că în această fază evolutivă nucleul stelei se contractă, densitatea și temperatura centrală cresc repede. În același timp învelișul stelei se dilată, dimensiunile și luminozitatea stelei cresc. Steaua iese din secvența principală și se deplasează repede (în milioane de ani) spre regiunea gigantelor.

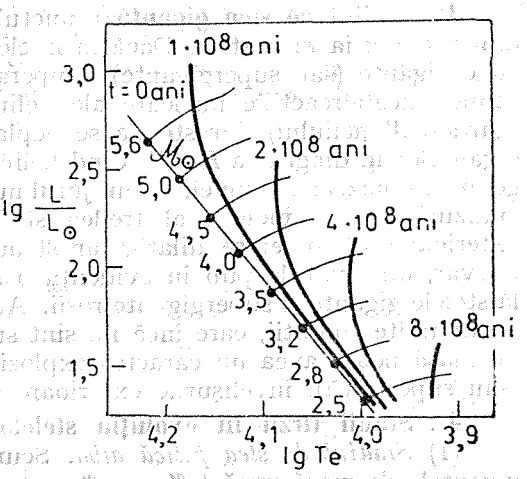


Fig. 15.2. Deplasarea cu timpul a stelelor de diferite mase din secvența principală.

Cele arătate mai sus (inclusiv diagrama din fig. 15.2) sînt rezultatele calculelor teoretice. Pe baza teoremei lui Vogt-Russell, traseul evolutiv al unei stele este determinat în mod unic prin masa și compoziția sa chimică. Faptul că evoluția decurge în modul indicat înainte rezultă din compararea traseelor teoretice de evoluție cu diagramele culoare-luminozitate ale roiurilor stelare. În fig. 15.2 sînt date traseele evolutive în diagrama $H-R$ ale unor stele cu mase între 2,5 și 5,6 mase solare (de aceeași compoziție chimică). Curba pe care se așază stelele la un moment dat se numește izocronă. În figură sînt date izocronele stelelor considerate, pentru $t = 0$ ($SPVZ$), $1 \cdot 10^8$ ani, $2 \cdot 10^8$ ani etc. Fig. 15.3 conține diagrama compusă culoare-luminozitate a 11 roiuri stelare. Înfășurătoarea secvențelor principale este $SPVZ$. Compararea figurilor 15.2 și 15.3 arată că la unele roiuri stelele masive au „plecat" de mult din secvența principală, evoluînd spre stadiul de gigantă.

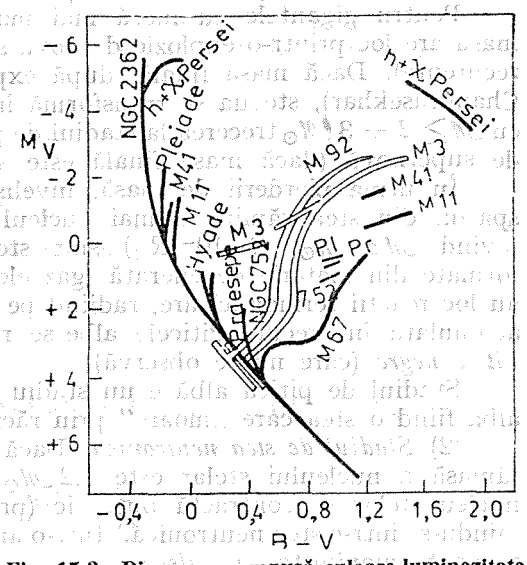


Fig. 15.3. Diagrama compusă culoare-luminozitate pentru 11 roiuri stelare.

Poziția diferită a secvențelor principale la roiurile globulare (M3, M92) se explică prin diferența în compoziția chimică.

Diferitele roiuri au secvența principală deplasată în mod diferit de la $SPVZ$. De aici se poate deduce vîrsta roiului. Cel mai tînăr roi este NGC 2362, a cărui vîrstă este evaluată la cîteva zeci de milioane de ani. Dintre roiurile din diagramă, cel mai vîrstnic este M67, avînd circa 5 miliarde de ani.

3° **Stadiul de stea gigantă** (punctul *D*, fig. 15.1). Este al treilea stadiu în evoluția unei stele. Dacă în nucleul dens izotermic de heliu al unei stele gigante (sau supergigante) temperatura atinge valoarea de $1{,}5 \cdot 10^8$K, atunci încep reacțiile nucleare ale heliului, care se transformă în carbon („arderea" heliului), iar steaua se deplasează spre stînga față de ramura gigantelor în diagrama $H-R$. Cînd heliul se epuizează în nucleu, iar hidrogenul se epuizează în învelișul din jurul nucleului, sursele de energie nucleară epuizîndu-se, se încheie al treilea stadiu în evoluția stelei. Învelișurile exterioare ale stelei se dilată, iar steaua începe să piardă din masă. În adevăr, observațiile pun în evidență o scurgere de materie din atmosferă la stelele gigante și supergigante roșii. Aceasta este pierderea lentă de masă. În anumite condiții, care încă nu sînt suficient de bine studiate, pierderea de masă poate avea un caracter exploziv. În urma unei explozii de novă (sau supernovă), învelișurile exterioare ale stelei sînt expulzate în spațiu.

4°. **Stadii tîrzii în evoluția stelelor**

(1) *Stadiul de stea pitică albă.* Scurgerea lentă de materie are loc la gigantele de masă mică ($\mathcal{M} \simeq 1\ \mathcal{M}_\odot$). În acest mod se formează nebuloasele planetare, ale căror nuclee fierbinți se transformă în stele pitice albe.

Pentru gigantele cu masă mai mare ($\mathcal{M} \lesssim 2 \div 3\ \mathcal{M}_\odot$), pierderea de masă are loc printr-o explozie de novă sau printr-o serie de explozii (nove recurente). Dacă masa finală, după explozie, este sub $1{,}2\ \mathcal{M}_\odot$ (limita lui Chandrasekhar), steaua se transformă într-o pitică albă. Pentru gigantele cu $\mathcal{M} \gtrsim 2 \div 3\ \mathcal{M}_\odot$ trecerea la stadiul de pitică albă se face printr-o explozie de supernovă (dacă masa finală este sub $1{,}2\ \mathcal{M}_\odot$).

În urma pierderii de masă, învelișul de hidrogen fiind expulzat în spațiu, din stea rămîne numai nucleul foarte dens. Astfel, piticele albe (avînd $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_\odot$, $R \sim 10^{-2} R_\odot$) sînt stele foarte dense ($\rho \simeq 10^9$ kg/m^3), formate din materie degenerată (gaz electronic degenerat). În ele nu mai au loc reacții termonucleare, radiind pe seama rezervei de energie termică acumulată în trecut. Piticele albe se răcesc treptat, transformîndu-se în *pitice negre* (care nu se observă).

Stadiul de pitică albă e un stadiu final în evoluția unei stele, pitica albă fiind o stea care „moare" prin răcire.

(2) *Stadiul de stea neutronică.* Dacă după explozia de supernovă masa rămasă a nucleului stelar este $1{,}2\ \mathcal{M}_\odot < \mathcal{M} < (2{,}5-3)\mathcal{M}_\odot$, atunci acest nucleu stelar se contractă puternic (prin colaps gravitațional), transformîndu-se într-o stea neutronică. Într-o anumită fază a existenței sale aceasta se poate manifesta ca *pulsar*.

(3) *Stadiul de gaură neagră.* La gigantele masive, masa care rămîne după explozia de supernovă poate depăși $2{,}5-3\ \mathcal{M}_\odot$. Un asemenea nucleu stelar dens este instabil intrînd în colaps gravitațional, care (teoretic) se contractă indefinit. Cînd raza stelei în colaps gravitațional scade sub raza Schwarzschild, steaua se transformă într-o gaură neagră. Aceste găuri negre sînt niște singularități ale Universului.

§ 15.3. FORMAREA SISTEMULUI SOLAR. IPOTEZE COSMOGONICE

Prima încercare de a lua în considerare evoluția corpurilor cerești o face *Buffon* (1749), care elaborează o ipoteză cu privire la originea și formarea sistemului planetar. Aceasta prezintă mai mult un interes istoric, de aceea nu ne oprim asupra ei.

1° **Ipoteza lui Kant** (1755). Filozoful german I. Kant (1724—1804) emite ipoteza că sistemul solar s-a format dintr-o nebuloasă, un nor cosmic de gaz și praf. Forțele de atracție și de repulsie fac ordine în materia neorganizată (haos). În centrul norului se formează Soarele, iar la periferie planetele. Kant nu explică *modul* în care s-au format Soarele și planetele.

În linii mari, ideea lui Kant este și astăzi considerată justă, dar ea n-a putut fi supusă unei elaborări detaliate, riguroase, deoarece la vremea aceea nu existau teoria atomică, teoria cinetică a gazelor, termodinamica etc. și lipseau informațiile despre structura și compoziția norilor cosmici etc.

2° **Ipoteza lui Laplace.** (1796). Matematicianul și mecanicianul francez P. S. Laplace (1749—1827) a dezvoltat ideea lui Kant cu privire la formarea sistemului solar dintr-o nebuloasă. Laplace consideră că în procesul formării planetelor un rol important joacă rotația nebuloasei. Astfel, el consideră că sistemul solar s-a format dintr-o nebuloasă (fierbinte) în rotație. Sub acțiunea gravitației, nebuloasa se contractă. Fiind izolată, momentul cinetic total al nebuloasei se conservă, deci, contractîndu-se, viteza ei unghiulară de rotație crește. Fie un element de masă m, în această nebuloasă, element ce descrie (datorită rotației nebuloasei), un cerc de rază r în jurul centrului nebuloasei presupuse sferice, cu viteza unghiulară ω. Momentul cinetic, K, al acestui element este constant, în lipsa forțelor exterioare, și are mărimea

$$K = mr^2\omega = \text{const.} \tag{15.2}$$

În urma contracției nebuloasei, r se micșorează, deci ω crește. Fie $\mathcal{M}$ — masa nebuloasei. Forța gravitațională, F_{grav}, cu care nebuloasa trage elementul considerat are mărimea

$$F_{grav} = G\frac{\mathcal{M}m}{r^2} \tag{15.3}$$

Elementul considerat mai este supus și forței centrifuge, F_{cen}, a cărei mărime este

$$F_{cen} = mr\omega^2 = \frac{K^2}{mr^3} \tag{15.4}$$

Relațiile (15.3), (15.4) arată că forța centrifugă F_{cen} crește prin contracție mai repede decît forța de atracție F_{grav}. Astfel, la o anumită valoare a razei, $r = r_{crit}$, cînd cele două forțe sînt egale în mărime (adică $F_{grav} = F_{cen}$), apare *instabilitatea rotațională* a nebuloasei. Aceasta se turtește, ia forma unui bob de linte, iar de la ecuatorul ei se desprinde materie sub formă unor inele plane (analoge cu inelele lui Saturn). Nebuloasa continuă să se contracte, formînd Soarele, iar din inele — care se condensează — se formează planetele, gravitînd în jurul Soarelui în plane orbitale apropiate de planul ecuatorului solar.

În sistemul solar, 98% din momentul cinetic revine planetelor și numai 2% — Soarelui, deși acesta concentrează 99,86% din masă. Dacă în cursul contracției nebuloasei momentul cinetic se conservă, atunc nu se poate explica această disproporție în distribuția momentului cinetic. Aceasta este principala obiecție față de ipoteza lui Laplace.

Alături de ideea lui Kant a formării simultane a Soarelui și planetelor dintr-o nebuloasă primară unică, teoriile cosmogonice moderne reţin şi ideea lui Laplace despre rolul rotaţiei (şi instabilităţii rotaţionale) în formarea sistemului solar.

3° **Ipoteza lui Jeans.** Astrofizicianul englez J. P. Jeans (1877—1946) a propus, la începutul secolului nostru, o nouă ipoteză cosmogonică, pentru a depăşi impasul în care ajunsese ipoteza lui Laplace. Jeans consideră că Soarele, ca şi alte stele, s-a format fără sistem planetar. Acest sistem s-a format ulterior, în urma unei catastrofe. O altă stea, trecînd în apropierea Soarelui, a produs un efect mareic atît de puternic, încît din Soare s-a desprins o „protuberanţă" de materie, care, prin condensare şi fragmentare, a dat naştere planetelor.

Faţă de ipoteza lui Jeans se ridică următoarele obiecţii:

— Pentru explicarea momentului cinetic actual al planetelor, ar trebui ca steaua considerată să aibă o viteză relativă de circa 5000 km/s faţă de Soare, în timp ce viteza parabolică în Galaxie este de 300 km/s. Foarte puţine stele din Galaxie depăşesc viteza parabolică.

— Probabilitatea apropierii a două stele, în limitele cerute de teoria lui Jeans, este extrem de mică, încît sistemul solar ar fi unic. Din observaţiile actuale rezultă, însă, că sistemele planetare trebuie să fie foarte numeroase în Galaxie.

— Calculele arată că gazele din protuberanţa desprinsă din Soare s-ar dispersa foarte repede (în cîteva ore), în loc să se condenseze în planete (pentru răcire ar fi necesare cîteva luni).

Datorită acestor obiecţii ipoteza lui Jeans se consideră ca fiind inconsistentă.

4° **Ipoteza lui Schmidt.** Savantul sovietic O. I. Schmidt (1891—1956) pentru a explica disproporţia în distribuţia momentului cinetic, consideră că planetele s-au format dintr-o nebuloasă de praf captată de Soare. În mişcarea sa în Galaxie, Soarele (format fără sistem planetar) a intrat într-o asemenea nebuloasă, din care s-a format mai întîi un nor protoplanetar, iar apoi prin condensare s-au format planetele. Calculele arată că o planetă cu masa egală cu a Pămîntului se formează prin condensare în $2 \cdot 10^8$ ani. Discordanţa în distribuţia momentului cinetic se poate explica prin intrarea necentrală a Soarelui în norul pe care l-a captat.

Principalele obiecţii ridicate faţă de ipoteza lui Schmidt sînt următoarele:

— Captarea unui nor cosmic de către o stea cere condiţii speciale, probabilitatea captării fiind foarte mică.

— Datele observaţionale pledează în favoarea unui proces unic de formare a Soarelui şi planetelor (Soarele şi planetele au vîrste comparabile).

În ultimele două decenii s-au propus numeroase ipoteze cosmogonice, care încearcă să explice diferitele fenomene observaţionale. Amintim, astfel, ipotezele elaborate de Kuiper, Fesenkov, Hoyle, Alfvén ş.a. O ipoteză care reuşeşte să explice suficient de bine cele mai multe dintre fenomenele observate este ipoteza emisă de astrofizicianul englez Fred Hoyle.

5° **Ipoteza lui Hoyle.** Hoyle (n. 1915) explică disproporţia în distribuţia momentului cinetic al sistemului solar prin transferul de moment cinetic al nebuloasei în contracţie (protostea) spre periferia ei, transfer realizat prin intermediul cîmpului magnetic. Cînd densitatea protostelei devine suficient de mare, transferul încetează, iar mai departe momentul cinetic variază

puțin. Contracția ulterioară a protostelei provoacă mărirea vitezei unghiulare de rotație, iar aceasta duce la apariția instabilității rotaționale. În cazul „Protosoarelui", aceasta a apărut cînd raza lui a fost aproximativ egală cu raza orbitei planetei Mercur. În acest moment a început scurgerea de materie din regiunea lui ecuatorială, materie care a format norul protoplanetar, avînd formă de disc (fig. 15.4).

Acum să presupunem că de protostea (nucleul protosolar) este legat un cîmp magnetic bipolar. Materia norului protoplanetar, fiind parțial ionizată, nu poate să se miște liber intersectînd liniile de forță, ci va fi antrenată de cîmp. Datorită prezenței norului protoplanetar, liniile de forță ale cîmpului magnetic se deformează (ca în fig. 15.4 a). Deoarece viteza unghiulară a discului este mai mică decît a protostelei (care a continuat să se contracte), liniile de forță se răsucesc (ca în fig. 15.4 b) luînd forma spirală. Prin aceasta ele frînează rotația protostelei și accelerează rotația discului. Cînd rotația protostelei este în mare măsură frînată, instabilitatea rotațională dispare, scurgerea materiei încetează și discul protoplanetar se separă de protostea.

Calculele arată că procesul descris înainte decurge diferit la stelele reci față de cele fierbinți. Stelele reci posedă o zonă convectivă subfotosferică întinsă. În acest caz, liniile de forță magnetice pot pătrunde adînc în protostea. Astfel, spiralele cîmpului magnetic sînt situate în cea mai mare parte în protostea, iar frînarea se produce lent în modul indicat mai sus.

La stelele fierbinți lipsește zona convectivă subfotosferică (la acestea, sub fotosferă se găsește un înveliș radiativ), astfel că spiralele cîmpului magnetic sînt situate în cea mai mare parte în exteriorul protostelei, în

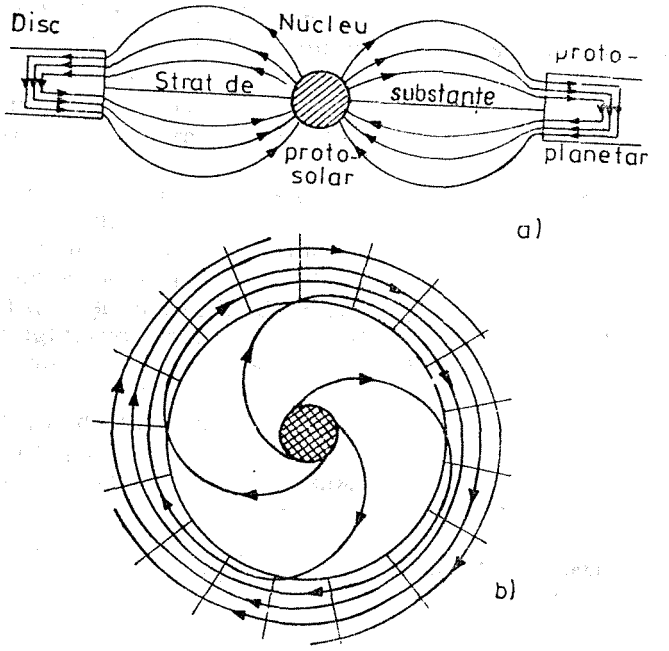


Fig. 15.4. Nucleul protosolar, discul protoplanetar și structura probabilă a cîmpului magnetic. a) Secțiune meridiană. b) Secțiune ecuatorială.

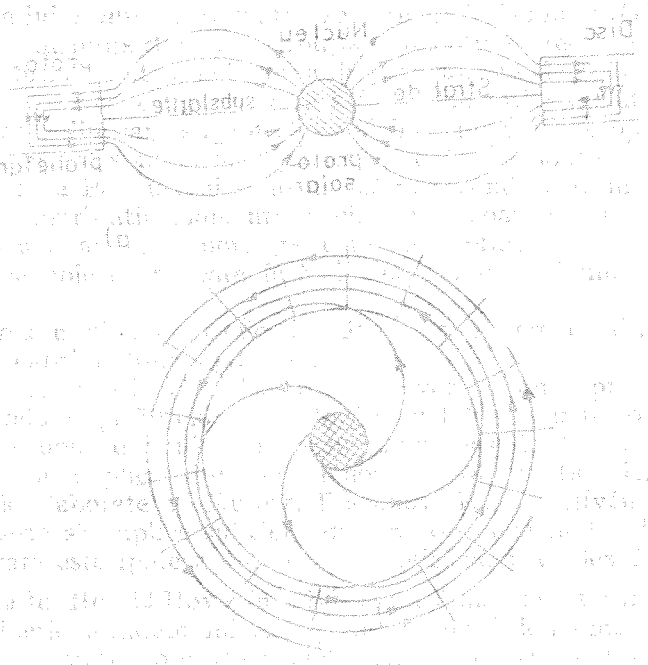
disc. De aceea, discul se răsucește foarte repede, distrugîndu-se înainte de a se scurge o cantitate cît de cît apreciabilă de masă din protostea. Discul protoplanetar nu reușește să se formeze în acest caz, iar steaua nu va pierde o fracțiune sensibilă din momentul cinetic. Prin urmare, se va forma o stea cu rotație rapidă, fără sistem planetar.

Discul protoplanetar odată format, ulterior, prin condensare, a dat naștere planetelor.

Astfel, ipoteza lui Hoyle explică în mod natural cauza discordanței în distribuția momentului cinetic și dă o schemă bine fundamentată, destul de probabilă, de formare a sistemului planetar.

Numeroase detalii, însă, sînt încă neexplicate, ca de exemplu: modul în care s-au format (condensat) planetele din norul protoplanetar, diferența între cele două grupe de planete (terestre și gigante), formarea sateliților planetelor etc. Cercetările actuale, inclusiv cele care utilizează rezultatele observațiilor spațiale, sînt orientate tocmai în direcția elucidării acestor detalii.

Și în țara noastră au existat preocupări pentru explicarea formării sistemului solar. Menționăm în acest sens ipoteza elaborată de profesorul V. Vâlcovici (1885—1970) de la Universitatea din București, ipoteză bazată pe considerații de teoria elasticității și de mecanica fluidelor.



ANEXA 1

NOȚIUNI ȘI FORMULE DE TRIGONOMETRIE SFERICĂ

1° **Triunghiul sferic.** Se numește triunghi sferic figura (porțiunea) ABC din suprafața sferei care se formează din trei arce de cercuri mari ce trec prin trei puncte ale sferei — *vîrfurile* triunghiului sferic (fig. A.1). Arcele de cercuri mari care leagă vîrfurile triunghiului sferic se numesc *laturile* acestui triunghi și se notează, ca și în trigonometria plană, cu a b, c. Numim *unghi* al triunghiului sferic unghiul dintre tangentele la laturile sale în vîrf sau măsura unghiului diedru dintre planele cercurilor mari care formează laturile triunghiului sferic. Unghiurile triunghiului sferic se notează, ca și în trigonometria plană, cu A, B, C sau α, β, γ.

Trei cercuri mari formează pe sferă opt triunghiuri sferice. Dintre ele, vom considera numai pe acela care are toate laturile și toate unghiurile mai mici decît π, respectiv 180° ; acestea se numesc *triunghiuri euleriene*.

În triunghiul sferic ABC unim fiecare vîrf cu centrul O al sferei de rază R. Obținem triedrul $OABC$, numit *triedrul corespunzător* al triunghiului sferic ABC, în care :

— fiecare unghi plan se măsoară cu latura corespunzătoare a triunghiului sferic ;

— fiecare unghi diedru este numeric egal cu unghiul corespunzător al triunghiului sferic, întrucît amîndouă se măsoară cu aceleași unghiuri plane.

Proprietățile și metodele de rezolvare a triunghiurilor sferice formează obiectul *trigonometriei sferice, un capitol special al matematicii**.

Proprietățile de bază ale triunghiului sferic eulerian sînt :

(1) *Într-un triunghi sferic suma laturilor se găsește între* 0 *și și* 2π :

$$0 < \widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} < 2\pi, \text{ respectiv}$$

$$0° < a + b + c < 360° \qquad \text{(A.1.1)}$$

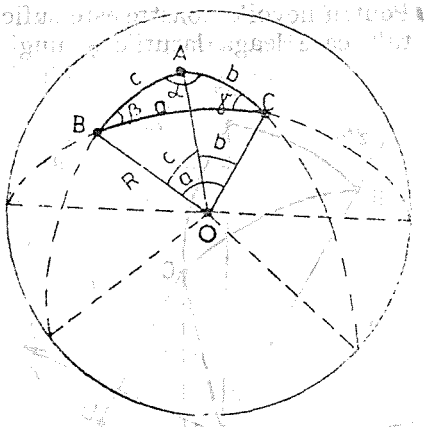


Fig. A.1. Triunghiul sferic și triedrul corespunzător.

* *Geometria pe sferă*, inclusă astăzi în clasa mai generală a *geometriilor eliptice*, a fost studiată de *B. Riemann (1854)*, reprezentînd una din *geometriile neeuclidiene* (prima geometrie neeuclidiană, inclusă în *geometriile hiperbolice*, a fost descoperită, după cum se știe, în mod independent de N. Lobacevski — 1829 și J. Bolyai — 1831).

(2) *Suma a două laturi este mai mare decît a treia. Diferența a două laturi este mai mică decît a treia:*

$$a < b + c \text{ etc.} \tag{A.1.2}$$

$$c > a - b \text{ etc.} \tag{A.1.3}$$

(3) *Într-un triunghi sferic suma unghiurilor se găsește între* π *și* 3π:

$$\pi < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} < 3\pi, \text{ respectiv } 180° < \alpha + \beta + \gamma < 540° \tag{A.1.4}$$

(4) *Suma a două unghiuri este mai mică decît al treilea mărit cu* π:

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} - \widehat{\gamma} < \pi \text{ etc., respectiv } \alpha + \beta - \gamma < 180° \text{ etc.} \tag{A.1.5}$$

(5) Diferența

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi = \widehat{\varepsilon}, \text{ respectiv } \alpha + \beta + \gamma - 180° = \varepsilon \tag{A.1.6}$$

se numește *exces sferic*. Deci o proprietate caracteristică a triunghiului sferic este:

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = \pi + \widehat{\varepsilon}, \text{ respectiv } \alpha + \beta + \gamma = 180° + \varepsilon \tag{A.1.7}$$

(6) *Latura mai mare se opune unghiului mai mare*: dacă $a > b$, atunci $\alpha > \beta$.

(7) *Aria triunghiului sferic* este dată de formula:

$$S_{ABC} = \widehat{\varepsilon} R^2, \text{ respectiv } S_{ABC} = \varepsilon \frac{\pi R^2}{180°}, \tag{A.1.8}$$

unde R este raza sferei pe a cărei suprafață este format triunghiul ABC.

2°. **Formulele de bază ale trigonometriei sferice (formulele lui Gauss).** Pentru nevoile noastre este suficient să deducem numai formulele fundamentale care leagă laturile și unghiurile triunghiului sferic. De asemenea, ne putem mărgini la cazul cînd laturile și unghiurile nu sînt mai mari de 90°.

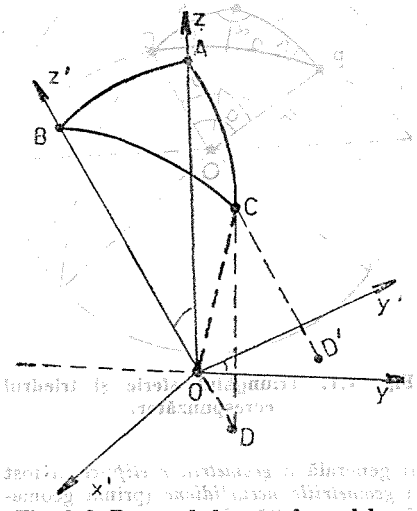


Fig. A.2. Pentru deducerea formulelor de bază ale trigonometriei sferice.

Fie triunghiul sferic ABC așezat pe sfera de rază $R = 1$, cu centrul în O, și $OABC$ — triedrul corespunzător. Vom considera *două sisteme de coordonate rectangulare cu originea comună în* O (fig. A.2):

— *primul sistem*, $Oxyz$, avînd axa Oz în direcția OA, axa $Oy \perp Oz$ în planul cercului AB, de cealaltă parte a lui Oz față de B, iar axa $Ox \perp yOz$, de aceeași parte cu C;

— *al doilea sistem*, $Ox'y'z'$, avînd axa Oz' în direcția OB, axa Oy' în planul cercului AB astfel ca $\widehat{yOy'} = \widehat{zOz'}$; axa Ox' este confundată cu axa Ox.

Fie D și D' proiecțiile vîrfului C al triunghiului ABC pe planele de coordo-

nate xOy, respectiv $x'Oy'$. Vom determina coordonatele punctului C în cele două sisteme de coordonate. Avem:

$$\left.\begin{aligned} x &= ||OC|| \cos \widehat{xOD} \sin \widehat{COA}, \quad x' = ||OC|| \cos \widehat{xOD'} \sin \widehat{COB} \\ y &= ||OC|| \sin \widehat{xOD} \sin \widehat{COA}, \quad y' = ||OC|| \sin \widehat{xOD'} \sin \widehat{COB} \\ z &= ||OC|| \cos \widehat{COA}, \qquad\quad z' = ||OC|| \cos \widehat{COB} \end{aligned}\right\} \quad \text{(A.1.9)}$$

Dar $||OC|| = 1$ și (fig. A.2) $\widehat{xOD} = A - \frac{\pi}{2}$, $\widehat{xOD'} = \frac{\pi}{2} - B$, $\widehat{COA} = b$, $\widehat{COB} = a$; cu aceste valori formulele (A.1.9) se simplifică și capătă forma definitivă.

Folosind formulele de rotație a axelor în jurul axei Ox, de unghiul $(-c)$:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \cos c + z \sin c \\ z' &= -y \sin c + z \cos c, \end{aligned}\right\} \quad \text{(A.1.10)}$$

după înlocuirea expresiilor de mai sus ale coordonatelor x, y, z și x', y', z', obținem *formulele lui Gauss*:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{aligned}\right\} \quad \text{(A.1.11)}$$

În mod analog, sau prin permutarea circulară a literelor în formulele (A.1.11), se obțin *încă două grupe de formule asemănătoare.*

Prima formulă (A.1.11) se numește *formula sinusului*, a doua — *formula a cinci elemente*, cuprinzînd cinci elemente ale triunghiului sferic, și a treia — *formula cosinusului*, dînd cosinusul unei laturi a triunghiului sferic în funcție de celelalte două laturi și de unghiul opus laturii căutate.

În astronomie, la rezolvarea triunghiului sferic, deseori trebuie determinate numai o latură (de exemplu, c) și unghiul alăturat (de exemplu, A). În acest caz se folosesc următoarele formule ale lui Gauss:

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C \end{aligned}\right\} \quad \text{(A.1.12)}$$

Vom *transforma* primele două formule *în forme calculabile prin logaritmi* (a treia este calculabilă prin logaritmi), introducînd în locul lui a și C elementele auxiliare m și M, astfel:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= m \cos M, \\ \sin a \cos C &= m \sin M, \end{aligned}\right\} \quad \text{(A.1.13)}$$

de unde obținem imediat:

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} a \cos C, \quad \text{(A.1.14)}$$

$$m = \frac{\cos a}{\cos M} = \frac{\sin a \cos C}{\sin M} \quad \text{(A.1.15)}$$

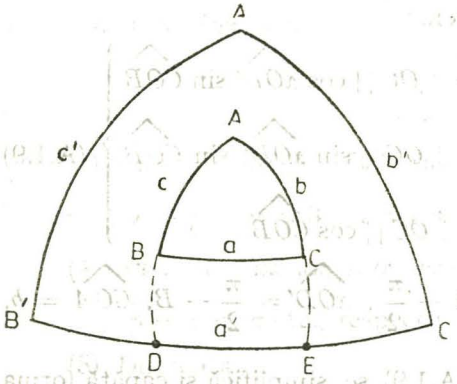


Fig. A.3. Triunghiul polar al unui triunghi sferic dat.

Atunci formulele (A.1.12) devin:

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= m \cos (b - M), \\ \sin c \cos A &= m \sin (b - M), \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.1.16)}$$

de unde:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin M}{\sin (b - M)} \operatorname{tg} C, \qquad \text{(A.1.17)}$$

și

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg}(b - M)}{\cos A} \qquad \text{(A.1.18)}$$

Formulele deduse sînt valabile și pentru triunghiurile sferice cu elemente mai mari decît 90°; este necesar numai să ținem seama de semnele funcțiilor trigonometrice ce intră în formula folosită, conform cadranului căruia îi corespund.

Aplicînd formulele lui Gauss la triunghiul polar al unui triunghi sferic dat, vom obține formule analoge cu formulele (A.1.11) *pentru unghiuri.*

Se numește *triunghi polar* al unui triunghi sferic dat triunghiul ale cărui laturi au ca poli vîrfurile triughiului dat (fig. A.3). Laturile triunghiului polar sînt suplemente ale unghiurilor corespunzătoare ale triunghiului dat și invers. Într-adevăr, să prelungim laturile AB și AC ale triunghiului dat ABC pînă taie latura $B'C'$ a triunghiului polar $A'B'C'$ în punctele D și E. Avem:

$$\left.\begin{aligned} &a' = B'E + EC' = 90° + 90° - A = 180° - A, \\ &b' = 180° - B,\ c' = 180° - C; \\ &A' = 180° - a,\ B' = 180° - b,\ C' = 180° - c. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.1.19)}$$

Se poate arăta ușor că triunghiul $A'B'C'$ are drept triunghi polar triunghiul dat ABC.

Aplicînd formulele lui Gauss (A.1.11) la triunghiul $A'B'C'$ și exprimînd elementele acestui triunghi cu cele ale triunghiului dat ABC, cu ajutorul formulelor (A.1.19), obținem următoarele formule:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \cos C \sin B \cos a, \\ \sin A \sin b &= \sin a \sin B. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.1.20)}$$

Se observă că aceste formule se obțin din formulele corespunzătoare ale lui Gauss (A.1.11) schimbînd literele mici în mari, și invers, și schimbînd semnul la cosinus și păstrînd semnul la sinus.

3°. **Aria triunghiului sferic.** Fie $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ punctele diametral opuse punctelor A, B, C de pe sferă (fig. A.4). Triunghiurile sferice determinate de trei puncte fiind simetrice două cîte două față de centrul sferei, au arii egale; de exemplu: $\Delta ABC = \Delta\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ sau $\Delta\bar{A}BC = \Delta A\bar{B}\bar{C}$.

Fiecare triunghi care are cu triunghiul ABC o latură comună îl completează pe acesta în așa fel încît se pot obține următoarele relații:

$$\Delta ABC + \Delta BC\bar{A} = 2R^2\widehat{\alpha} \text{ (aria fusului sferic de unghi } \widehat{\alpha}); \quad \text{(A.1.21)}$$

$$\Delta ABC + \Delta CA\bar{B} = 2R^2\widehat{\beta} \text{ (aria fusului sferic de unghi } \widehat{\beta}); \quad \text{(A.1.22)}$$

$$\Delta ABC + \Delta AB\bar{C} = 2R^2\widehat{\gamma} \text{ (aria fusului sferic de unghi } \widehat{\gamma}). \quad \text{(A.1.23)}$$

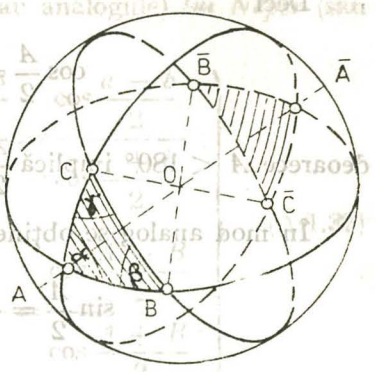


Fig. A.4. Triunghiuri sferice simetrice.

Prin adunare membru cu membru a celor trei formule de mai sus, rezultă:

$$3\Delta ABC + (\Delta BC\bar{A} + \Delta CA\bar{B} + \Delta AB\bar{C}) = 2R^2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}) \quad \text{(A.1.24)}$$

Datorită simetriei față de centru, avem:

$$\Delta ABC + (\Delta BC\bar{A} + \Delta CA\bar{B} + \Delta AB\bar{C}) = \Delta ABC + (\Delta BC\bar{A} + \Delta CA\bar{B} + \Delta A\bar{B}\bar{C}) = 2R^2\pi$$

(jumătate din aria sferei); deci:

$$2\Delta ABC + 2\pi R^2 = 2R^2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}) \quad \text{(A.1.24')}$$

sau

$$\Delta ABC = R^2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi) \quad \text{(A.1.24'')}$$

Aria triunghiului sferic ABC, cu notația S_{ABC}, este prin urmare:

$$S_{ABC} = \widehat{\varepsilon}R^2 \text{ sau } \frac{\pi R^2}{180^\circ}\varepsilon, \quad \text{(A.1.25)}$$

adică formula (A.1.8), unde ε este *excesul sferic*.

4°. **Formulele lui Delambre, Neper și L'Huillier**

(1) *Formulele lui Delambre și Neper.* Din formula cosinusului (A.1.11) avem:

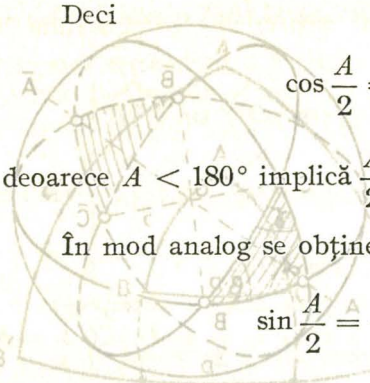
$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad \text{(A.1.26)}$$

Făcînd combinațiile $1 + \cos A = 2\cos^2(A/2)$ și $1 - \cos A = 2\sin^2(A/2)$ obținem pe $\frac{A}{2}$ cu ajutorul formulei:

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin p \sin(p - a)}{\sin b \sin c},$$

dacă notăm $a + b + c = 2p$.

Deci



$$\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}, \tag{A.1.27}$$

deoarece $A<180°$ implică $\frac{A}{2}<90°$ și $\cos\frac{A}{2}>0$.

În mod analog se obține formula

$$\sin\frac{A}{2}=+\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}} \tag{A.1.28}$$

și, prin permutări circulare, formule analoge pentru $\frac{B}{2}$ și $\frac{C}{2}$.

Din formulele (A.1.27) și (A.1.28) deducem:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sin p}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}=$$

$$=\frac{\sin p}{\sin c}\sin\frac{C}{2}, \tag{A.1.29}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{C}{2} \tag{A.1.30}$$

Adunînd membru cu membru, obținem:

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin\left(p-\frac{c}{2}\right)\cos\frac{c}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}$$

și, în mod analog, formulele pentru $\cos\frac{A+B}{2}$, $\sin\frac{A-B}{2}$, $\sin\frac{A+B}{2}$.

Acestea sînt *formulele lui Delambre*, care se scriu sub forma:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},\quad \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}};\\ &\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};\quad \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},\end{aligned}\right\} \tag{A.1.31}$$

din care, prin împărţire obţinem: *formulele* (sau analogiile) *lui Neper* (sau *Napier*):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}, \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}; \\ \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} &= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}, \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{A.1.32}$$

Din aceste formule rezultă o *proprietate importantă a triunghiului sferic*: $a-b$ fiind de acelaşi semn cu $A-B$, dacă $a > b$, avem $A > B$.

(2) *Formula lui L'Huillier*. Vom exprima excesul sferic în funcţie de laturi. Pentru aceasta considerăm următoarea formulă din trigonometria plană:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} \tag{A.1.33}$$

Întrucît

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \operatorname{tg}\frac{A+B+C-\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{\left(\frac{A+B}{2}\right)-\left(\frac{\pi-C}{2}\right)}{2}, \tag{A.1.34}$$

pentru $x = \dfrac{A+B}{2}$, $y = \dfrac{\pi-C}{2}$, rezultă:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\sin\frac{A+B}{2} - \sin\frac{\pi-C}{2}}{\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{\pi-C}{2}} = \frac{\sin\frac{A+B}{2} - \cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}} \tag{A.1.35}$$

Înlocuind aici $\sin\dfrac{A+B}{2}$ şi $\cos\dfrac{A+B}{2}$ prin valorile date de formulele lui Delambre (A.1.31), obţinem:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}}{\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{c}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}, \tag{A.1.36}$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\frac{2\sin\dfrac{a-b+c}{4}\sin\dfrac{c-a+b}{4}}{2\cos\dfrac{a+b+c}{4}\cos\dfrac{a+b-c}{4}}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}}.$$

Exprimînd $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$ cu ajutorul formulei corespunzătoare ce se obține din (A.1.27) și (A.1.28), avem:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\sin\dfrac{p-a}{2}\sin\dfrac{p-b}{2}}{\cos\dfrac{p}{2}\cos\dfrac{p-c}{2}}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin(p-a)\sin(p-b)}} \tag{A.1.37}$$

Ridicînd la pătrat și folosind formula $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, rezultă:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{4}=\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}, \tag{A.1.38}$$

care este *formula lui L'Huillier*.

5°. **Trecerea de la trigonometria sferică la trigonometria plană.** Să considerăm trei puncte din spațiu ce nu sînt coliniare, A, B, C. Ele determină un plan, și în acest plan un triunghi. În același timp, există o infinitate de sfere pe a căror suprafață se găsesc cele trei puncte. Dacă aceste sfere sînt ordonate după mărimea razelor, atunci, cînd $R\to\infty$, curburile respective descresc și triunghiul sferic se apropie de un triunghi plan; unghiurile pe sferă se apropie de unghiuri plane obișnuite și excesul sferic $\widehat{\varepsilon}$ devine oricît de mic. Lungimile laturilor triunghiului plan $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, au drept corespondente în triunghiul sferic arcele $\dfrac{\bar{a}}{R}$, $\dfrac{\bar{b}}{R}$, $\dfrac{\bar{c}}{R}$, măsurate în unități de arc.

Din dezvoltarea funcțiilor trigonometrice sinus și cosinus în serii convergente, notînd $\dfrac{\bar{a}}{R}=q_a$, $\dfrac{\bar{b}}{R}=q_b$, $\dfrac{\bar{c}}{R}=q_c$ și prin δ_i — mărimile ce tind la 0 odată cu $1/R^4$, se obține:

$$\left.\begin{aligned}\sin q_a&=q_a-\frac{1}{3!}q_a^3+\ldots=q_a\left(1-\frac{1}{6}q_a^2+\delta_1\right),\\ \cos q_a&=1-\frac{1}{2}q_a^2+\delta_2\end{aligned}\right\} \tag{A.1.39}$$

Din teorema sinusurilor din trigonometria sferică rezultă:

$$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=\bar{a}\left(1-\frac{1}{6}q_a^2+\delta_1\right):\bar{b}\left(1-\frac{1}{6}q_b^2+\delta_3\right):\bar{c}\left(1-\frac{1}{6}q_c^2+\delta_5\right) \tag{A.1.40}$$

și la limită se obține :

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \bar{a} : \bar{b} : \bar{c}, \tag{A.1.41}$$

adică *teorema sinusurilor din trigonometria plană.*

Din teorema cosinusurilor din trigonometria sferică se obține :

$$1 - \frac{1}{2} q_a^2 + \delta_2 = \left(1 - \frac{1}{2} q_b^2 + \delta_4\right)\left(1 - \frac{1}{2} q_c^2 + \delta_6\right) +$$

$$+ q_b q_c \left(1 - \frac{1}{6} q_b^2 + \delta_3\right)\left(1 - \frac{1}{6} q_b^2 + \delta_5\right) \cdot \cos \alpha, \tag{A.1.42}$$

de unde

$$-\frac{1}{2} q_a^2 + \delta_2 = -\frac{1}{2}(q_b^2 + q_c^2) - \delta_{4,6} + q_b q_c \left[1 - \frac{1}{6}(q_b^2 + q_c^2) + \delta_{3,5}\right] \cos \alpha \tag{A.1.43}$$

și la limită se obține

$$\bar{a}^2 = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\bar{b}\bar{c} \cos \alpha, \tag{A.1.44}$$

adică *teorema cosinusurilor din trigonometria plană.*

Dacă în formula lui L'Huillier (A.1.38), funcțiile tangentă se înlocuiesc cu arcele unghiurilor, acestea din urmă fiind foarte mici, obținem *formula aproximativă* :

$$\frac{\widehat{\varepsilon}}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\bar{p}}{R} \cdot \frac{\bar{p} - \bar{a}}{R} \cdot \frac{\bar{p} - \bar{b}}{R} \cdot \frac{\bar{p} - \bar{c}}{R}} \tag{A.1.45}$$

Din expresia ariei S_{ABC} (A.1.25) a triunghiului sferic, pe baza formulei (A.1.45), se obține *formula lui Heron pentru triunghi plan* :

$$S_{ABC} = \widehat{\varepsilon} R^2 = \frac{\varepsilon}{4} \cdot 4R^2 = \sqrt{\bar{p}(\bar{p} - \bar{a})(\bar{p} - \bar{b})(\bar{p} - \bar{c})}. \tag{A.1.46}$$

ANEXA 2

CONSTELAȚIILE

Denumirea în limba latină (genitiv)	Notarea	Denumirea în limba română
Andromeda (*-ae*)	And	Andromeda
Antlia (*-ae*)	Ant	Mașina Pneumatică
Apus (*-odis*)	Aps	Pasărea Paradisului
Aquarius (*-i*)	Aqr	Vărsătorul
Aquila (*-ae*)	Aql	Vulturul
Ara (*-ae*)	Ara	Altarul
Aries (*-tis*)	Ari	Berbecul
Auriga (*-ae*)	Aur	Vizitiul
Bootes (*-is*)	Boo	Bouarul
Caelum (*-i*)	Cae	Dalta
Camelopardalis (—)	Cam	Girafa
Cancer (*-cri*)	Cnc	Racul
Canes (*-um*) Venatici (*-orum*)	CVn	Câinii de Vînătoare
Canis (—) Major (*-is*)	CMa	Câinele Mare
Canis (—) Minor (*-is*)	CMi	Câinele Mic
Capricornus (*-i*)	Cap	Capricornul
Carina (*-ae*)	Car	Carena
Cassiopeia (*-ae*)	Cas	Cassiopeia
Centaurus (*-i*)	Cen	Centaurul
Cepheus (*-i*)	Cep	Cefeu
Cetus (*-i*)	Cet	Balena
Chamaeleon (*-tis*)	Cha	Cameleonul
Circinus (*-i*)	Cir	Compasul
Columba (*-ae*)	Col	Porumbelul
Coma (*-ae*) Berenices	Com	Părul Berenicei
Corona (*-ae*) Australis	CrA	Coroana Australă
Corona (*-ae*) Borealis	CrB	Coroana Boreală
Corvus (*-i*)	Crv	Corbul
Crater (*-is*)	Crt	Cupa
Crux (*-cis*)	Cru	Crucea Sudului
Cygnus (*-i*)	Cyg	Lebăda
Delphinus (*-i*)	Del	Delfinul
Dorado (*-us*)	Dor	Peștele de Aur
Draco (*-nis*)	Dra	Dragonul
Equuleus (*-i*)	Equ	Calul Mic
Eridanus (*-i*)	Eri	Eridanul
Fornax (*-cis*)	For	Cuptorul
Gemini (*-orum*)	Gem	Gemenii
Grus (*-is*)	Gru	Cocorul
Hercules (*-is*)	Her	Hercule
Horologium (*-i*)	Hor	Orologiul
Hydra (*-ae*)	Hya	Hidra
Hydrus (*-i*)	Hyi	Hidra Australă
Indus (*-i*)	Ind	Indianul
Lacerta (*-ae*)	Lac	Șopîrla

Denumirea în limba latină (genitiv)	Notarea	Denumirea în limba română
Leo (*-nis*)	Leo	Leul
Leo (*-nis*) Minor (*-is*)	LMi	Leul Mic
Lepus (*-oris*)	Lep	Iepurele
Libra (*-ae*)	Lib	Balanța
Lupus (*-i*)	Lup	Lupul
Lynx (*-cis*)	Lyn	Linxul
Lyra (*-ae*)	Lyr	Lira
Mensa (*-ae*)	Men	Platoul
Microscopium (*-i*)	Mic	Microscopul
Monoceros (*-tis*)	Mon	Licornul
Musca (*-ae*)	Mus	Musca
Norma (*-ae*)	Nor	Echerul
Octans (*-tis*)	Oct	Octantul
Ophiuchus (*-i*)	Oph	Ofiucus
Orion (*-is*)	Ori	Orion
Pavo (*-nis*)	Pav	Păunul
Pegasus (*-i*)	Peg	Pegas
Perseus (*-i*)	Per	Perseu
Phoenix (*-cis*)	Phe	Phoenix
Pictor (*-is*)	Pic	Pictorul
Pisces (*-ium*)	Psc	Peștii
Piscis Austrinus (*-i*)	PsA	Peștele Austral
Puppis (—)	Pup	Pupa
Pyxis (*-idis*)	Pyx	Busola
Reticulum (*-i*)	Ret	Reticulul
Sagitta (*-ae*)	Sge	Săgeata
Sagittarius (*-i*)	Sgr	Săgetătorul
Scorpius (*-i*)	Sco	Scorpionul
Sculptor (*-is*)	Scl	Sculptorul
Scutum (*-i*)	Sct	Scutul
Serpens (*-tis*)	Ser	Șarpele
Sextans (*-tis*)	Sex	Sextantul
Taurus (*-i*)	Tau	Taurul
Telescopium (*-i*)	Tel	Telescopul
Triangulum (*-i*)	Tri	Triunghiul
Triangulum (*-i*) Australe (*-is*)	TrA	Triunghiul Austral
Tucana (*-ae*)	Tuc	Tucanul
Ursa (*-ae*) Major (*-is*)	UMa	Ursa Mare
Ursa (*-ae*) Minor (*-is*)	UMi	Ursa Mică
Vela (*-orum*)	Vel	Velele
Virgo (*-inis*)	Vir	Fecioara
Volans (*-tis*)	Vol	Peștele Zburător
Vulpecula (*-ae*)	Vul	Vulpea

ANEXA 3

DATE GENERALE RELATIVE LA PLANETELE MARI (DUPĂ ANUARUL ASTRONOMIC '83)

Planeta	Diametrul ecuatorial (km)	Turtirea	Masa ($M_\oplus = 1$)	Viteza de eliberare la suprafață (km/s)	Perioada de rotație (timp mediu)
Mercur	4 878	0	0,056	4,3	58^{d}17^h min
Venus	12 104	0	0,817	10,4	243
Pământ	12 756	1/298,25	1,000	11,2	23 56
Marte	6 784	1/190	0,108	5,1	24 37
Jupiter	142 800	1/15	318,356	60,2	9 50
Saturn	120 000	1/10	95,223	35,8	10 14
Uranus	50 800	1/18 ?	14,580	22,4	10 45
Neptun	48 600	1/58 ?	17,264	25,1	15 40
Pluto	5 000 ?	?	0,926	?	?

Planeta	a	e	i	T_{sid}	T_{sin}
Mercur	0,387	0,20561421	7°00'10",37	0,241	115,88
Venus	0,723	0,00682069	3 23 37 ,07	0,615	583,92
Pământ	1,000	0,01675104		1,000	—
Marte	1,524	0,09331290	1 51 01 ,20	1,881	779,94
Jupiter	5,204	0,04833475	1 08 31 ,45	11,862	398,88
Saturn	9,578	0,05589232	2 29 33 ,07	29,458	378,09
Uranus	19,238	0,0463444	0 46 20 ,87	84,013	369,66
Neptun	30,044	0,00899704	1 46 45 ,27	164,793	367,48
Pluto	39,773	0,2486438	17 08 48 ,40	247,686	366,72

a = semiaxa mare a orbitei (UA);
e = excentricitatea orbitei;
i = înclinarea planului orbitei pe planul eclipticii;
T_{sid} = revoluția siderală (ani julieni);
T_{sin} = revoluția sinodică (zile medii).

ANEXA

DATE GENERALE RELATIVE LA SATELIȚII PLANETELOR MARI (DUPĂ ANUARUL ASTRONOMIC '83)

Planeta	Satelitul	Nr.	Perioada de revoluție sideral (z)	Raza (km)	Masa (10^{23} g)
Pământ	Luna		27,32166	1738	735
Marte	Phobos	I	0,31891	13,5; 10,8; 9,4	0,000105
	Deimos	II	1,26244	8;7;6	$<0{,}00005$
Jupiter*	Amalthea	V	0,49818	120	10^{-8}**
	Io	I	1,76914	1820	891
	Europa	II	3,55118	1560	487
	Ganimede	III	7,15455	2635	1490
	Callisto	IV	16,68902	2400	1074
	Leda	XIII	239	~ 5	$\sim 10^{-12}$**
	Himalia	VI	250,57	85	$\sim 40 \cdot 10^{-10}$**
	Lysithea	X	260	~ 12	$\sim 10^{-11}$**
	Elara	VII	260,1	40	$\sim 4 \cdot 10^{-10}$**
	Ananke	XII	617	~ 10	10^{-11}**
	Carme	XI	692,5	~ 15	$\sim 2 \cdot 10^{-11}$**
	Pasiphae	VIII	735	~ 18	$\sim 4 \cdot 10^{-11}$**
	Sinope	IX	758	~ 14	$\sim 2 \cdot 10^{-11}$**
Saturn***	Inelul		0,4—0,7	—	~ 250
	(?)	XI	0,694	~ 100	$\sim 15 \cdot 10^{-9}$**
	Ianus	X	0,749	~ 100	$\sim 15 \cdot 10^{-9}$**
	Mimas	I	0,94242	195	0,37
	Encelade	II	1,37022	245	0,85
	Thetys	III	1,88780	525	6,26
	Dione	IV	2,73692	555	11,6
	Rhea	V	4,51750	760	$\sim 18{,}2$
	Titan	VI	15,94545	2560	1401
	Hyperion	VII	21,27767	155	$\sim 15 \cdot 10^{-9}$**
	Japet	VIII	79,33082	725	~ 224
	Phoebe	IX	550,45	70	$\sim 2 \cdot 10^{-8}$**
Uranus****	Miranda	V	1,4135	~ 150	—
	Ariel	I	2,52038	~ 400	—
	Umbriel	II	4,14418	~ 275	—
	Titania	III	8,70588	~ 500	—
	Oberon	IV	13,46326	~ 450	—
Neptun	Triton	I	5,87683	2200	~ 3400
	Nereida	II	365,2	~ 150	$\sim 2 \cdot 10^{-7}$**
Pluto	Charon	I	6,3867	~ 1000	$\sim 0{,}05—0{,}10$**

*În septembrie 1975 a fost descoperit la Mt. Palomar satelitul XIV al planetei Jupiter; sonda *Voyager*-2 l-a redescoperit în iulie 1979. Satelitul ar avea diametrul de cca. 30—40 km

și ar efectua o revoluție în jurul planetei în 7,13 ore. În 1979, fotografiile transmise de sonda *Voyager*-1 au dus la descoperirea celui de-al XV-lea satelit al lui Jupiter, avînd diametrul de cca. 70—80 km și efectuînd o revoluție în jurul planetei în 16,3 ore. În martie 1979 a fost descoperit, cu ajutorul sondei *Voyager*-1, un inel în jurul lui Jupiter, avînd grosimea de pînă la 30 km, format din particule solide. Lățimea inelului este cca. 8700 km, iar raza interioară — cca. 128 000 km.

** din masa planetei.

*** Sondele *Voyager*-1 (noiembrie 1980) și *Voyager*-2 (august 1981) au descoperit noi sateliți ai planetei, astfel că numărul lor total este de 17. Majoritatea celor noi descoperiți au diametrul mai mic de 400 km. Sonda *Voyager*-2 a permis să se pună în evidență peste 10 000 de inele în jurul lui Saturn.

**** În martie 1977 a fost descoperit un sistem de nouă inele în jurul planetei Uranus, ale căror raze sînt cuprinse între 41 980 km și 52 000 km.

ANEXA 5

ELEMENTE DE MECANICĂ CEREASCĂ

A.5.1. Cinematica mişcării eliptice. Problema lui Kepler

Vom arăta că coordonatele unei planete ce se mişcă în jurul Soarelui după *legile lui Kepler* se pot exprima în funcţie de timp, fără a se ţine seama de cauzele ce produc această mişcare.

Fie elipsa (cu centrul în O) descrisă de o planetă P în mişcarea sa heliocentrică (avînd focarul în S — Soarele) şi $\prod A$ — axa mare a acestei elipse (fig. A.5). În sistemul de coordonate $O\bar{\xi}\bar{\eta}$, în care axa $O\bar{\xi}$ este dirijată după semiaxa mare $O\prod = a$, iar axa $O\bar{\eta}$ după semiaxa mică $OB = b$, *ecuaţia canonică* a elipsei este:

$$\frac{\bar{\xi}^2}{a^2} + \frac{\bar{\eta}^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(A.5.1)}$$

Această ecuaţie o înlocuim cu ecuaţii parametrice, alegînd *parametrul* în modul următor: din punctul $P(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, reprezentînd poziţia planetei pe elipsă la momentul t, ducem o perpendiculară pe $\prod A$ şi notăm cu Q piciorul acestei perpendiculare. Ducem cercul principal (cercul circumscris) al elipsei şi prelungim perpendiculara PQ pînă ce taie acest cerc în P'. Introducem următoarele unghiuri: $\widehat{\prod SP} = v$ — *anomalia adevărată* a planetei şi $\widehat{\prod OP'} = E$ — *anomalia excentrică* a planetei. Se vede că poziţia punctului P' poate fi determinată cu ajutorul anomaliei excentrice E.

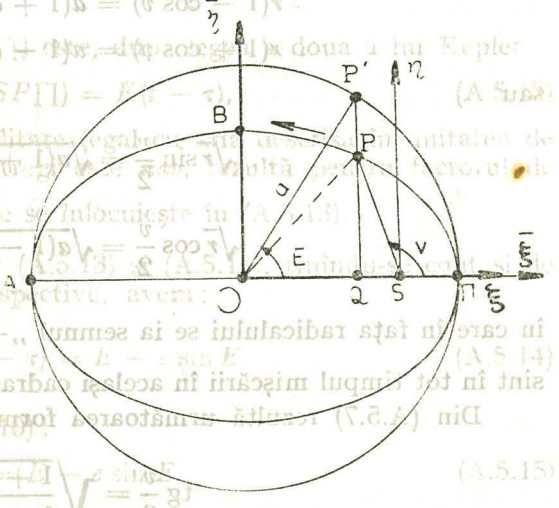


Fig. A.5. Mişcarea eliptică a unei planete.

Ecuaţia (A.5.1) este echivalentă, după cum se ştie din geometria analitică, cu ecuaţiile:

$$\bar{\xi} = a\cos E, \quad \bar{\eta} = b\sin E, \qquad \text{(A.5.2)}$$

care se numesc *ecuațiile parametrice ale elipsei*, rolul parametrului jucîndu-l anomalia excentrică E mai înainte introdusă. Rezultă deci că și poziția punctului P poate fi determinată cu ajutorul lui E.

Notînd cu $r = SP$ — raza vectoare a punctului P, cu $e = OS/O\Pi$ — excentricitatea elipsei, avem: $OS = ae$, $b = \sqrt{a^2 - OS^2} = a\sqrt{1 - e^2}$, $QP = QP' \frac{b}{a} = QP' \cdot \cos\varphi$ $(b < a)$, unde φ este unghiul dintre planul cercului principal și planul elipsei, dacă se consideră elipsa ca proiecția ortogonală a cercului situat într-un alt plan.

Introducem acum *sistemul de coordonate orbitale rectangulare* $S\xi\eta$ (fig. A.5), avînd axe paralele cu axele sistemului $S\bar{\xi}\bar{\eta}$ și cu originea în focarul S. Atunci avem, pe de o parte:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a\cos E - ae = a(\cos E - e) \\ \eta &= b\sin E = a\sqrt{1 - e^2}\sin E, \end{aligned}\right\} \tag{A.5.3}$$

iar pe de altă parte:

$$\xi = r\cos v, \quad \eta = r\sin v \tag{A.5.4}$$

Comparînd egalitățile (A.5.3) și (A.5.4), obținem formulele:

$$\left.\begin{aligned} r\sin v &= a\sqrt{1 - e^2}\sin E \\ r\cos v &= a(\cos E - e), \end{aligned}\right\} \tag{A.5.5}$$

care servesc pentru calculul coordonatelor orbitale polare r, v, cînd se dă E.

Din formulele (A.5.5), prin eliminarea anomaliei adevărate, obținem ușor formula:

$$r = a(1 - e\cos E) \tag{A.5.6}$$

Prin combinarea acestei egalități cu cea de-a doua din egalitățile (A.5.5), se deduc, de asemenea, următoarele formule:

$$r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos E),$$
$$r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos E),$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r}\sin\frac{v}{2} &= \sqrt{a(1 + e)}\sin\frac{E}{2} \\ \sqrt{r}\cos\frac{v}{2} &= \sqrt{a(1 - e)}\cos\frac{E}{2} \end{aligned}\right\} \tag{A.5.7}$$

în care în fața radicalului se ia semnul „+", întrucît unghiurile $\frac{v}{2}$ și $\frac{E}{2}$ sînt în tot timpul mișcării în același cadran.

Din (A.5.7) rezultă următoarea formulă (perechea formulei (A.5.6)):

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \tag{A.5.8}$$

În felul acesta, pentru calculul coordonatelor r și v, după o valoare dată a lui E, se pot folosi, în locul formulelor (A.5.5), fie formulele (A.5.7), fie formulele (A.5.6) și (A.5.8).

Observăm, în continuare, că după eliminarea lui E între ecuațiile (A.5.5) sau între prima din ecuațiile (A.5.5) și ecuația (A.5.6), se obține *ecuația elipsei în coordonate polare*:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \tag{A.5.9}$$

unde $p = a(1 - e^2)$ este parametrul elipsei, adică ordonata punctului elipsei a cărui anomalie adevărată $v = 90°$.

Pentru a desăvîrși studiul problemei puse, trebuie să stabilim și *legea de mișcare pe elipsă*, adică relația funcțională dintre anomalia excentrică E și timpul t.

Dacă notăm cu τ — momentul trecerii planetei prin vîrful Π al elipsei mai apropiat de focarul S (acest punct se numește *periheliu*, iar punctul opus A — *afeliu*), atunci cantitatea M, definită prin relația

$$M = n(t - \tau), \quad n = \frac{2\pi}{T} \tag{A.5.10}$$

se numește *anomalia mijlocie* a planetei, n fiind *viteza unghiulară medie* sau *mișcarea medie* a planetei, T — perioada de revoluție sideral a planetei.

Din fig. A.5 se vede că aria sectorului eliptic $SP\Pi$ este proiecția ortogonală pe planul elipsei a ariei $SP'\Pi$ din planul cercului, adică:

$$\text{aria } (SP\Pi) = \frac{b}{a} \cdot \text{aria } (SP'\Pi), \tag{A.5.11}$$

unde:

$$\text{aria } (SP'\Pi) = \text{aria } (OP'\Pi) - \text{aria } (OP'S) = \frac{a^2}{2} E - \frac{a^2 e}{2} \sin E \tag{A.5.12}$$

Pe de altă parte, aria $(SP\Pi)$ este, după legea a doua a lui Kepler

$$\text{aria } (SP\Pi) = K(t - \tau), \tag{A.5.13}$$

K fiind factorul de proporționalitate (egal cu aria descrisă în unitatea de timp). Știind că aria elipsei întregi este πab, rezultă pentru factorul de proporționalitate $K = \frac{\pi ab}{T}$, care se înlocuiește în (A.5.13).

Din compararea egalităților (A.5.13) și (A.5.11), ținîndu-se cont și de (A.5.12), după simplificările respective, avem:

$$\frac{2\pi}{T}(t - \tau) = E - e \sin E, \tag{A.5.14}$$

sau, ținîndu-se seama de (A.5.10):

$$M = E - e \sin E. \tag{A.5.15}$$

care poartă numele de *ecuația lui Kepler*.

Se vede că această ecuație stabilește relația funcțională (transcendentă) dintre anomalia excentrică E și anomalia mijlocie M, aceasta din urmă fiind funcție explicită de timp după (A.5.10). Se poate arăta ușor că funcția $f(E) = E - e \sin E$ este monotonă, și anume crescătoare pentru $E \in (-\infty, +\infty)$ și $e < 1$ (elipsă) și ia o singură dată valoarea M pentru o valoare reală a lui E (rădăcina ecuației lui Kepler). Deci ecuația lui Kepler (A.5.15) admite, pentru orice $M \in IR$, o singură rădăcină reală.

Observăm că formula (A.5.15) ne dă pe M în radiani, dacă unghiul E este exprimat în radiani. Dacă E este dat în secunde de arc, atunci ecuația lui Kepler se scrie sub forma:

$$M'' = E'' - 206\,264'',8\ (e \sin E) \qquad \text{(A.5.15')}$$

Rezolvarea ecuației lui Kepler (găsirea rădăcinii reale E pentru un M real dat) se poate face prin mai multe metode. Una dintre cele mai simple metode este *metoda aproximațiilor succesive*, care se aplică aici astfel:

Scriem (A.5.15), în care se dă M, sub forma:

$$E = M + e \sin E. \qquad \text{(A.5.15)''}$$

Luînd ca primă aproximație $E = M$, avem succesiv:

$$\begin{aligned} E_1 &= M + e \sin M, \\ E_2 &= M + e \sin E_1, \\ E_3 &= M + e \sin E_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n &= M + e \sin E_{n-1}, \end{aligned} \qquad \text{(A.5.16)}$$

continuînd pînă vom ajunge la două valori succesive E_n și E_{n+1} egale (în aproximația cerută).

Se poate, de asemenea, arăta ușor că acest proces de iterație este *convergent*, oricare ar fi $E \in IR$.

În multe probleme ale astronomiei se cere ca *rădăcina ecuației lui Kepler, ca și coordonatele orbitale* să fie reprezentate, folosind diferite dezvoltări în serii, *ca funcții explicite de timp*.

Asemenea serii se pot obține pentru valori mici ale lui e, limitîndu-se la primii termeni ai seriilor, prin următorul *procedeu simplu*.

Am văzut că rădăcina ecuației lui Kepler, E, în prima aproximație este (A.5.16):

$$E = M + e \sin M,$$

iar în a doua aproximație:

$$E = M + e \sin (M + e \sin M),$$

sau:

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \ldots \qquad \text{(A.5.17)}$$

Pentru raza vectoare r, folosind (A.5.6) și (A.5.15''), obținem

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos M + e^2 \sin^2 M + \frac{3}{2} e^3 \cos M \sin^2 M + \ldots \quad \text{(A.5.18)}$$

Din formulele (A.5.5) găsim ușor:

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2}\,dE}{1 - e\cos E},$$

iar din ecuația lui Kepler:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{1 - e\cos E} \cdot \frac{dM}{dt}$$

Deci

$$dv = \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{dE}{dM} dE = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{dE}{dM}\right)^2 dM.$$

Înlocuind aici expresia lui E din (A.5.17) și integrînd, obținem:

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M - \frac{4}{3} e^3 \sin M \left(1 - \frac{13}{4} \cos^2 M\right) + \ldots \quad \text{(A.5.19)}$$

Cantitatea $(v - M)$ se numește *ecuația centrului*, și formula (A.5.19), împreună cu formula (A.5.18), servesc printre altele la compararea mișcării eliptice cu mișcarea pe excentric, adică mișcarea de revoluție uniformă a punctului P' văzută din punctul S (fig. A.5).

A.5.2. Mișcarea satelitului artificial al Pământului

1°. Mișcarea neperturbată după modelul problemei celor două corpuri. La încetarea funcționării motoarelor rachetei purtătoare și realizarea vitezei proiectate — după modelul mișcării punctului de masă variabilă, studiat în mecanică —, lansarea obiectului de pe suprafața Pământului s-a terminat și mișcarea se efectuează după inerție, sub acțiunea forței centrale (de atracție) a Pământului, precum și sub influența diferitelor perturbații.

Vom vedea mai jos că, în funcție de viteza cosmică, obiectul lansat poate fi *satelit* (mișcare pe cerc sau elipsă) sau *navă cosmică* (sau *navă interplanetară*) (mișcare pe parabolă sau hiperbolă).

În *prima aproximație*, mișcarea după inerție poate fi studiată *pe baza soluției problemei celor două corpuri* (cap. VII). Fie pe fig. A.6: T — centrul Pământului de masă $\mathcal{M}$; R — raza Pământului; P_0 — punctul în care obiec-

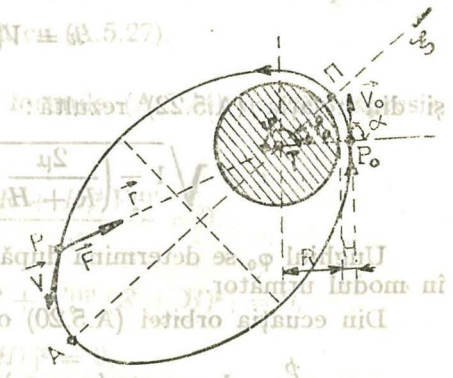


Fig. A.6. Pentru definirea parametrilor de lansare ai unui satelit artificial.

tul lansat este plasat pe orbită; H — înălțimea punctului P_0 de la suprafața Pământului; $TP_0 = r_0 = R + H$; $\vec{V}(P_0) = \vec{V}_0$ — viteza inițială a obiectului lansat (viteza cosmică); $\alpha = \sphericalangle (\vec{r}_0 \vec{V}_0)$; P — poziția obiectului lansat, la momentul t; $\prod$ — poziția perigeului orbitei; $\varphi = \sphericalangle (TP_0, TP)$; $\varphi_0 = \sphericalangle (TP_0, T\prod)$; $\vec{F}$ — forța de atracție newtoniană.

Parametrii H, V_0 și α se numesc *condiții inițiale* sau *parametri de lansare* (sau *plasare pe orbită*) ai corpurilor cerești artificiale.

Conform soluției problemei celor după corpuri (cap. VII), raza vectoare, parametrul și excentricitatea conicii se exprimă cu ajutorul formulelor:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos (\varphi - \varphi_0)} \tag{A.5.20}$$

$$p = \frac{c^2}{\mu} \tag{A.5.21}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{hc^2}{\mu^2}} \tag{A.5.22}$$

unde $\mu = G\mathcal{M}$ — parametrul gravitațional al Pământului (masa satelitului, m, este neglijabilă față de masa Pământului, $\mathcal{M}$), c — constanta ariilor și h — constanta energiei.

Elementele orbitale p, e *și* φ_0 ($\equiv \tilde{\omega}$ — longitudinea perigeului socotită de la verticala punctului P_0) pot fi exprimate, *în funcție de* H, V_0 *și* α, astfel.

Conform legii ariilor:

$$c = 2\frac{dS}{dt} = |\vec{r} \times \vec{V}| = |\vec{r}_0 \times \vec{V}_0| = r_0 V_0 \sin \alpha$$

și, înlocuind în relația (A.5.21), obținem:

$$p = \frac{(R + H)^2 V_0^2 \sin^2 \alpha}{\mu} \tag{A.5.23}$$

Potrivit cu integrala energiei:

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{R + H},$$

și din relația (A.5.22) rezultă:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{2\mu}{R + H} - V_0^2\right) \frac{(R + H)^2 V_0^2 \sin^2 \alpha}{\mu^2}} \tag{A.5.24}$$

Unghiul φ_0 se determină după tg φ_0, a cărei expresie poate fi stabilită în modul următor.

Din ecuația orbitei (A.5.20) obținem:

$$\frac{p}{r} - 1 = e \cos (\varphi - \varphi_0), \qquad \frac{p}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = e \sin (\varphi - \varphi_0),$$

care în punctul P_0 ($\varphi = 0$) ne dau, prin împărțire:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-p\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0}{(R+H)[p-(R+H)]},$$

sau, după înlocuirea derivatei pe baza formulei cunoscute din geometria diferențială:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0 = r_0 \operatorname{ctg} \alpha,$$

avem:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{(R+H)V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\mu - (R+H)V_0^2 \sin^2 \alpha} \tag{A.5.25}$$

Deoarece la suprafața Pământului:

$$\mu = gR^2, \tag{A.5.26}$$

unde g — accelerația gravitațională, în formulele de mai sus poate fi făcută această substituție. Valoarea numerică a parametrului gravitațional al Pământului este $\mu = 398\,600$ km^3/s^2.

(1) *Mișcarea circulară a satelitului artificial.* Dacă în punctul P_0 mărimea vitezei are valoarea *primei viteze cosmice*, determinată de *formula vitezei circulare*

$$V_0^{(1)} = \sqrt{\frac{\mu}{R+H}} \tag{A.5.27}$$

și direcția vitezei este situată în planul orizontal al punctului P_0 $\left(\alpha = \pm\frac{\pi}{2}\right)$, atunci obiectul lansat — devenit *satelit artificial* — se va mișca pe cerc. Acest fapt rezultă și din relațiile (A.5.20) și (A.5.23). Într-adevăr, pentru orbita circulară de rază $r = p = R + H$ trebuie să se îndeplinească condițiile: $e = 0$ și $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, împreună cu (A.5.27).

Invers, pentru $e = 0$ și $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ formula (A.5.24) ne dă expresia pentru prima viteză cosmică:

$$1 - \left(\frac{2\mu}{R+H} - V_0^{(1)^2}\right)\frac{(R+H)^2 V_0^{(1)^2}}{\mu^2} = 0,$$

$$(R+H)[\mu^2 - 2\mu(R+H)V_0^{(1)^2} + V_0^{(1)^4}(R+H)^2] = 0,$$

$$[\mu - V_0^{(1)^2}(R+H)]^2 = 0,$$

de unde rezultă (A.5.27).

Formula (A.5.27) arată că prima viteză cosmică descreşte cu înălţimea, ceea ce se observă bine din tabelul următor, întocmit pe baza acestei formule

Tabelul A.5.1

H (km)	0	250	500	750	1000	1500	1690	2000	5000	10000	35870
$V_0^{(1)}$ (km/s)	7,91	7,76	7,62	7,48	7,35	7,12	7,03	6,90	5,92	4,94	3,07
T (ore)	1,41	1,49	1,58	1,66	1,75	1,93	2,00	2,10	3,35	5,78	24,00

Aici T — perioada de revoluţie siderală a satelitului în mişcarea circulară, determinată cu ajutorul formulei:

$$T = \frac{2\pi(R+H)}{V_0^{(1)}} \tag{A.5.28}$$

Satelitul ipotetic care s-ar mişca în imediata vecinătate a suprafeţei terestre ($H = 0$), adică satelitul cu parametrii orbitali $V_0^{(1)} = 7{,}91$ km/s şi $T = 1{,}41$ ore se numeşte *„satelitul de zero"* al Pământului. Propriu-zis, prin *prima viteză cosmică* se înţelege valoarea de 7,91 km/s.

Satelitul lansat la înălţimea medie de H = 35 870 km, avînd parametrii orbitali $V_0^{(1)} = 3{,}07$ km/s şi $T = 24{,}00$ ore, se numeşte *satelit staţionar al Pământului*, sau *satelit geostaţionar*. Denumirea provine de la faptul că un asemenea satelit, datorită valorii perioadei sale de revoluţie, egală cu perioada de rotaţie a Pământului şi avînd înclinarea $i = 0°$, se vede nemişcat pentru un observator situat la ecuator. Sateliţii de telecomunicaţii de tipul *MOLNIYA* (U.R.S.S.), *TELSTAR* (S.U.A.) etc. — cu ajutorul cărora se realizează transmisiile la mari distanţe ale programelor de televiziune şi ale mesajelor radiotelegrafice — sînt sateliţi geostaţionari sau aproape geostaţionari, dar au, de obicei, orbite eliptice.

(2) *Mişcarea eliptică a satelitului artificial.* Realizarea practică a unui satelit artificial care să evolueze pe o orbită circulară este o problemă tehnică foarte dificilă. De aceea, orbitele sateliţilor artificiali sînt practic eliptice.

Fără a stabili toate condiţiile necesare realizării sateliţilor artificiali ai Pământului*, menţionăm că din relaţia (A.5.24) rezultă *o condiţie necesară* pentru aceasta, corespunzătoare condiţiei $e < 1$:

$$V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{R+H}} \tag{A.5.29}$$

Mărimea, determinată de *formula vitezei parabolice*:

$$V_0^{(2)} = \sqrt{\frac{2\mu}{R+H}} = \sqrt{2}V_0^{(1)} \tag{A.5.30}$$

ne dă *a doua viteză cosmică* pentru înălţimea H (sau *viteza de eliberare* din vecinătatea Pământului). Valoarea numerică a acestei viteze la suprafaţa Pământului ($H = 0$) este de 11,2 km/s şi propriu-zis această valoare se numeşte *a doua viteză cosmică.*

* O interpretare hodografică interesantă a acestor condiţii a fost dată de *Caius Iacob*, în „Gazeta Matematică", vol. LVI, nr. 5, Bucureşti, 1949; v. şi *L. Dragoş*, în „Gazeta Matematică", seria A, vol. LXXVIII, nr. 2, 1973.

Semiaxa mare a orbitei eliptice ca funcție de condițiile inițiale de plasare pe orbită se exprimă astfel:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\mu}{\dfrac{2\mu}{R + H} - V_0^2}, \tag{A.5.31}$$

iar razele vectoare minimă și maximă, după formulele:

$$r_{min} = r_\pi = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) =$$

$$= \frac{\mu}{\dfrac{2\mu}{R + H} - V_0^2}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\mu}{R + H} - V_0^2\right)\frac{(R + H)^2 V_0^2 \sin^2 \alpha}{\mu^2}}\right) \tag{A.5.32}$$

și în mod analog pentru r_{max}. Pentru viteze avem formulele:

$$V^2 = V_0^2 + 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R + H}\right), \tag{A.5.33}$$

$$V_{min} = V_A = \frac{(R + H)V_0 \sin \alpha}{p}(1 - e) \tag{A.5.34}$$

și în mod analog pentru V_{max}.

Perioada de revoluție a satelitului artificial pe elipsă se obține după legea a III-a generalizată a lui Kepler:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi\mu}{\left(\dfrac{2\mu}{R + H} - V_0^2\right)^{3/2}} \tag{A.5.35}$$

Mișcarea în spațiu a satelitului artificial al Pământului se studiază față de sistemul de referință $Txyz$ (fig. A.7), al cărui plan fundamental coincide cu planul ecuatorului terestru, axa Tx fiind orientată spre punctul vernal Υ. Exprimarea elementelor orbitale Ω, ω, i și M_0 în funcție de condițiile inițiale de plasare pe orbită este o problemă mai grea, deoarece nu se cunosc, în general, componentele vectorilor $\vec{r}_0$ și $\vec{V}_0$ în sistemul de referință $Txyz$.

(3) *Realizarea de nave cosmice (nave interplanetare).* Dacă obiectul lansat în punctul P_0 capătă o viteză $V_0 \geqslant V_0^{(2)}$, mișcarea se va face pe parabolă sau hiperbolă, obiectul devenind *navă interplanetară*. Legile mișcării pe aceste conice sînt studiate, de asemenea, în

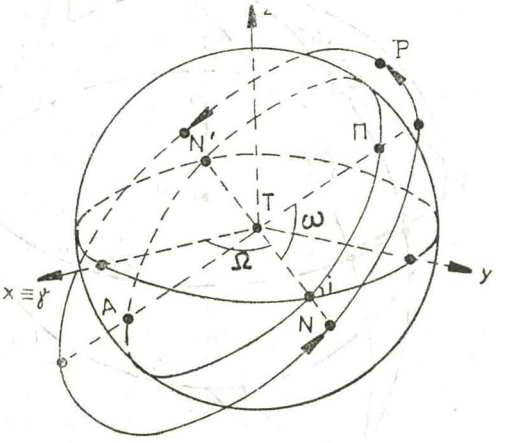


Fig. A.7. Orbita satelitului artificial și proiecția ei pe sfera cerească.

mecanica cerească; ele pot fi uşor adaptate la condiţiile plasării pe orbită.

Observăm că formulele stabilite mai sus sînt aplicabile şi la alte corpuri cereşti sferice, cu repartiţie sferică a densităţii (Lună, planete etc.).

2°. **Perturbaţiile elementelor orbitale ale sateliţilor artificiali ai Pămîntului.** *Principalele perturbaţii* care fac ca orbita reală a satelitului artificial al Pămîntului să fie mult mai complicată decît cea kepleriană (neperturbată) sînt cauzate de următoarele *trei categorii de factori*: (1) necentralitatea (anomaliile) cîmpului gravitaţional al Pămîntului, condiţionată, în principal, de turtirea Pămîntului la poli; (2) rezistenţa atmosferei terestre; şi (3) forţele luni-solare: acţiunea gravitaţională a Soarelui şi Lunii şi presiunea radiaţiei solare.

(1) *Efectul turtirii Pămîntului* (sau al umflăturii ecuatoriale) este, în general, cel mai însemnat ca mărime dintre toate perturbaţiile. Astfel, de exemplu, dacă satelitul se află în planul ecuatorului, la înălţimea de 230 km de la sol (6608 km de la centrul Pămîntului), acceleraţia perturbatoare pe seama turtirii Pămîntului este de aproximativ 1,40 cm/s², fiind de 656 ori mai mică decît acceleraţia principală datorită atracţiei terestre la această înălţime (914 cm/s²). Această perturbaţie se manifestă în următoarele fenormene.

În primul rînd, în rotaţia planului orbitei satelitului în jurul axei polilor Pămîntului, în sens opus mişcării satelitului pe orbită, fenomen numit *precesia orbitei satelitului artificial al Pămîntului* (analogie cu mişcarea de precesie a ecuatorului în sens opus rotaţiei Pămîntului). Ca urmare, longitudinea nodului ascendent Ω descreşte (dacă $i < 90°$), înclinarea orbitei faţă de ecuator rămînînd constantă (fig. A.8).

Odată cu creşterea unghiului i de la 0° la 90°, $|\dot{\Omega}|$ descreşte de la valoarea sa maximă *(sateliţi ecuatoriali)* la valoarea zero *(sateliţi polari)*. Astfel, *pentru Sputnik 1*, avînd elementele orbitale: $a = 6954{,}3$ km, $e = 0{,}052$, $i = 65°{,}1$, cu $R = 6378{,}4$ km, s-a găsit $\dot{\Omega} = -3°{,}15$ pe zi.

În al doilea rînd, efectul turtirii Pămîntului se manifestă în rotaţia orbitei satelitului în planul său orbital, fenomenul numindu-se *deplasarea liniei apsidale* (semiaxei mari) a orbitei satelitului artificial al Pămîntului, sau *deplasarea perigeului* satelitului artificial. Ca urmare, longitudinea perigeului ω creşte sau descreşte după caz (fig. A.9), deplasarea perigeului fiind maximă pentru $i = 0°$ şi 180° şi zero pentru $\cos i = 1/\sqrt{5}$, adică $i = 63°{,}4$; această *înclinare* este numită *critică*. Pentru $i < 63°{,}4$ perigeul se deplasează pe orbită în acelaşi sens în care are loc mişcarea satelitului, iar pentru $i > 63°{,}4$ perigeul se deplasează în sensul opus mişcării

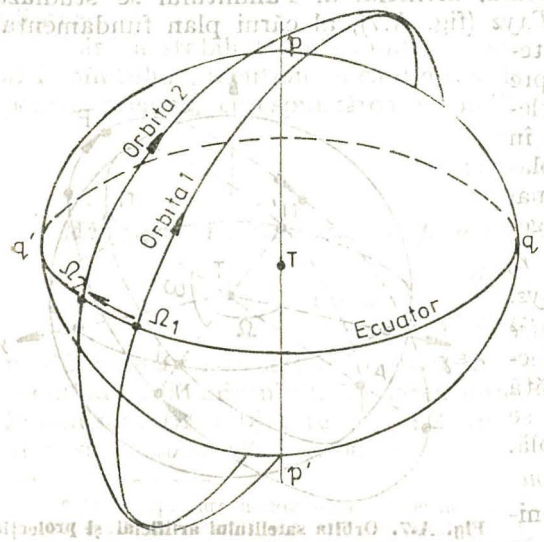


Fig. A.8. Precesia orbitei satelitului artificial.

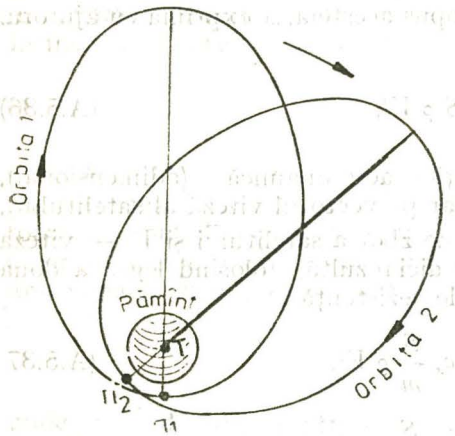


Fig. A.9. Deplasarea perigeului orbitei satelitului artificial în planul orbitei.

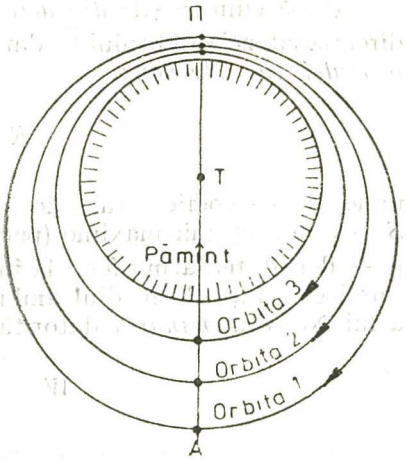


Fig. A.10. Modificarea orbitei satelitului artificial datorită frînării atmosferice: 1 — orbita inițială; 2 — orbita la jumătatea duratei vieții satelitului; 3 — orbita după consumarea a 85% din durata vieții satelitului.

satelitului. Astfel, *pentru Sputnik 1*, cu elementele de mai sus, s-a găsit $\dot{\omega} = -0°,43$ pe zi.

Din teoria mișcării perturbate rezultă, de asemenea, că mărimile $|\dot{\Omega}|$ și $|\dot{\omega}|$ descresc rapid odată cu creșterea distanței medii a satelitului (a) de la centrul Pămîntului.

Observăm că, pe baza cunoașterii perturbațiilor sateliților artificiali pe seama necentralității cîmpului gravitațional terestru, s-au obținut valori numerice mai precise pentru turtirea Pămîntului, precum și pentru ceilalți parametri ai cîmpului său gravitațional.

(2) *Efectul rezistenței atmosferei terestre* are un caracter cu totul diferit de efectul turtirii Pămîntului. Această perturbație, cauzată de ciocnirea satelitului artificial cu moleculele atmosferei, constă în *frînarea (încetinirea) mișcării satelitului în atmosferă*, fenomenul manifestîndu-se în principal *în regiunea perigeului orbitei*, unde atmosfera este mai densă. Ca urmare, după fiecare trecere la perigeu, înălțimea apogeului scade, înălțimea perigeului rămînînd aproape constantă; dimensiunile orbitei inițial eliptice se reduc, orbita apropiindu-se de orbita circulară: elementele orbitale a și e descresc în mod *secular* (proporțional cu timpul) (fig. A.10). Descrește continuu și perioada de revoluție a satelitului artificial T și, după atingerea valorii ei critice de aproximativ 87,75 min, satelitul intră în straturile mai dense ale atmosferei (100—150 km), se încălzește datorită frecării și se dezintegrează.

Durata mișcării satelitului artificial de la momentul plasării pe orbită pînă la frînarea totală în straturile dense ale atmosferei se numește *durata vieții satelitului artificial al Pămîntului*. Evident, cu cît mai înaltă este orbita inițială a satelitului, cu atît mai mare este durata vieții lui. Astfel, *Sputnik 1* avea $H_\pi = 228$ km, $H_A = 947$ km și timpul de existență de 94 zile.

După cum se știe *din aerodinamică, forța de rezistență*, orientată după direcția vitezei satelitului $\vec{V}$, dar în sens opus acesteia, se exprimă cu ajutorul *formulei lui Newton*:

$$R = \frac{1}{2} c_x S \rho V^2, \qquad \text{(A.5.36)}$$

unde c_x — coeficientul de rezistență aerodinamică (adimensional), S — aria secțiunii maxime (perpendicular pe vectorul viteză al satelitului), ρ — densitatea atmosferei la înălțimea de zbor a satelitului și V — viteza satelitului față de mediul ambiant. De aici rezultă, folosind legea a doua a lui Newton, *frînarea* datorită forței de rezistență:

$$W = \frac{R}{m} = \frac{1}{2} c_x \frac{S}{m} \rho V^2, \qquad \text{(A.5.37}$$

unde m — masa satelitului artificial, iar $\frac{S}{m}$ — *încărcarea transversală*.

Astfel, *de exemplu*, la înălțimea de 230 km deasupra suprafeței terestre, unde $\rho = 3 \cdot 10^{-13}$ g/cm³, un satelit cu $S = 1\text{m}^2$ și $m = 100$ kg întîmpină o frînare de $W = 0{,}019$ cm/s²; aceasta este de 50 000 ori mai mică decît accelerația principală datorită atracției terestre la înălțimea considerată. Cu toate acestea, frînarea satelitului artificial dă naștere unor variații destul de însemnate în elementele orbitale a și e, care caracterizează forma și dimensiunile orbitei.

Observăm că, pe baza cunoașterii perturbațiilor sateliților artificiali datorită frînării atmosferice, avem posibilitatea de a calcula densitatea aerului la înălțimile de zbor ale sateliților.

(3) *Perturbațiile luni-solare* ale orbitelor sateliților artificiali ai Pămîntului apar atît sub acțiunea gravitațională a Lunii și Soarelui, cît și datorită presiunii radiației solare. Aceste perturbații sînt însemnate mai ales la sateliții cu excentricități foarte mari, respectiv la sateliții cu mase mici și suprafețe foarte mari (sateliții balon de tip ECHO).

3°. **Noțiuni despre traiectorii de zbor spre Lună și planete.** Navele cosmice iau de obicei startul, pentru a se îndrepta spre Lună sau planete, de pe orbite de sateliți artificiali ai Pămîntului (orbite de „parcare"). Problema mișcării unei nave cosmice pe porțiunea pasivă a traiectoriei sale constituie, în general, *o problemă a n corpuri* și poate fi rezolvată, cu aproximația dorită, prin metodele amintite ale mecanicii cerești (cap. VII). Datorită însă unor particularități ale orbitelor navelor cosmice, la *calculele preliminare* ale acestora se folosește o *schemă simplificată*, care constă în următoarele:

Dacă viteza navei la momentul (punctul) începerii porțiunii pasive a traiectoriei este egală sau mai mare decît *a doua viteză cosmică* ($V_0^{(2)}$) față de Pămînt și se neglijează perturbațiile, nava cosmică se va mișca față de Pămînt, cum s-a mai spus, după parabolă sau hiperbolă, atîta timp cît rămîne în *sfera de acțiune* a Pămîntului sau nu intră în sfera de acțiune a unui alt corp ceresc.

Se numeşte *sfera de acţiune* a unui corp ceresc de masă mai mică (m), în raport cu un corp ceresc de masă mai mare ($\mathcal{M}$), domeniul din spaţiu în interiorul căruia este satisfăcută condiţia:

$$\frac{\Delta F'}{F} < \frac{\Delta F}{F'}, \qquad \text{(A.5.38)}$$

unde F şi F' — forţele de atracţie (asupra navei cosmice) ale corpului de masă m, respectiv $\mathcal{M}$, iar ΔF şi $\Delta F'$ — forţele perturbatoare corespunzătoare. Se poate demonstra că suprafaţa de separaţie a domeniului de acţiune a corpului mic în raport cu corpul mare (în ipoteza că $m \ll \mathcal{M}$) poate fi aproximată cu o *sferă de rază*:

$$\rho_a = r\left(\frac{m}{\mathcal{M}}\right)^{2/5}, \qquad \text{(A.5.39)}$$

unde r — distanţa dintre cele două corpuri de mase m şi $\mathcal{M}$. Denumirea de sferă de acţiune, justificată prin formula (A.5.39), a fost introdusă de *Laplace* în legătură cu studiul mişcării cometelor care trec prin sfera de acţiune a lui Jupiter în raport cu Soarele*. *De exemplu*, raza sferei de acţiune a Lunii faţă de Pământ este de 66 000 km, iar raza sferei de acţiune a Pământului în raport cu Soarele este de 930 000 km.

Intrînd *în sfera de acţiune a unui alt corp ceresc*, nava cosmică se va mişca în continuare sub acţiunea forţei de atracţie a acestui corp; atracţia Pământului, pierzîndu-şi rolul „dominant", va juca rolul unei forţe perturbatoare, neglijabilă în prima aproximaţie.

Caracterul mişcării pe mai departe depinde de *mărimea vitezei* navei cosmice *pe sfera de acţiune* a corpului ceresc respectiv. Astfel, dacă viteza faţă de acest corp este zero, nava cosmică cade pe suprafaţa corpului; dacă viteza este cuprinsă între zero şi a doua viteză cosmică (faţă de corpul respectiv), atunci nava poate deveni, cu îndeplinirea unor condiţii suplimentare, satelit artificial al corpului ceresc; în sfîrşit, dacă viteza navei este egală sau mai mare decît viteza parabolică faţă de corpul ceresc în cauză, nava cosmică, mişcîndu-se după un arc de parabolă sau hiperbolă în jurul corpului, iese din sfera de acţiune a acestuia şi se îndreaptă spre alte corpuri cereşti.

O navă cosmică ce iese din sfera de acţiune a Pământului în raport cu Soarele, cu o viteză diferită de zero, poate deveni un satelit al Soarelui, adică o *planetă artificială*. După cum se ştie, prima planetă artificială a fost lansată în U.R.S.S., la 2 ianuarie 1959; ea a ieşit pe o orbită heliocentrică la 7—8 ianuarie, cu o viteză de circa 2 km/s.

Se demonstrează că, *pentru părăsirea sistemului solar*, viteza geocentrică minimă a rachetei ce se lansează de pe suprafaţa Pământului trebuie să aibă valoarea $V_0^{(3)} = 16{,}6$ km/s; această viteză se numeşte *a treia viteză cosmică*.

Prima navă cosmică ce urmează să părăsească sistemul solar a fost lansată în S.U.A., la 2 martie 1972 (laboratorul spaţial *Pioneer*-10); la apropierea maximă de planeta Jupiter, la aproximativ 130 000 km, a ajuns la 3 decembrie 1973 (fig. A.11), faţă de 4 decembrie 1973, cum a rezultat din calcule preliminare.

---

* În mecanica cerească se defineşte şi noţiunea de *sferă de gravitaţie* (sau *echigravisferă*), care se obţine din condiţia $F = F'$; raza acestei sfere se notează cu ρ_g.

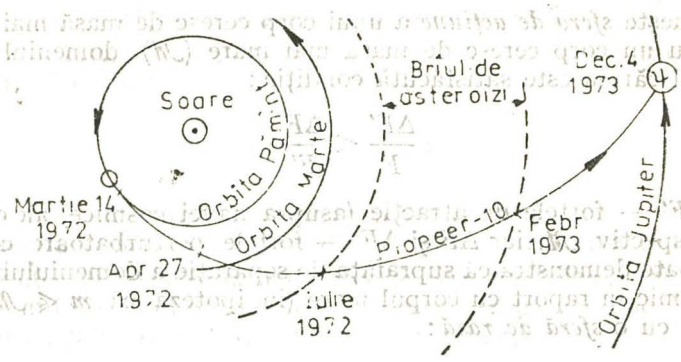


Fig. A.11. Traiectoria navei cosmice Pioneer-10 prin sistemul solar (pînă la Jupiter).

Orbita unei *nave interplanetare* poate fi eliptică, parabolică sau hiperbolică. Se poate, de asemenea, a rătăcă cea mai economică din punct de vedere energetic este mişcarea pe o semielipsă tangentă la orbita Pămîntului şi la orbita planetei; în schimb, alegerea de traiectorii parabolice sau hiperbolice scurtează de multe ori durata zborului.

Dăm, în sfîrşit, definiţia *sferei de acţiune a Soarelui* faţă de centrul Galaxiei. Presupunînd că întreaga masă a Galaxiei este în centrul său, iar Soarele se mişcă în jurul acestui centru pe o orbită eliptică, după formula (A.5.39) şi cu datele : $m/\mathcal{M} = 1 : 1{,}3 \cdot 10^{11}$ şi $r = 8 \cdot 10^3$ pc $= 16{,}5 \cdot 10^8$UA, obţinem raza : $\rho_a = 0{,}29$ pc $= 60\,000$ UA.

ANEXA 6

SOLUȚIA APROXIMATIVĂ A LUI EDDINGTON PENTRU ECUAȚIA TRANSFERULUI RADIATIV

Dacă punem $\mathcal{J} = J$ în ecuația transferului radiativ (11.10), aceasta se scrie

$$\cos\theta \frac{\mathrm{d}I(\tau, \theta)}{\mathrm{d}\tau} = I(\tau, \theta) - J(\tau) \tag{A.6.1}$$

Eddington a obținut o soluție aproximativă a acestei ecuații printr-un procedeu elegant, introducînd următoarele notații (cu semnificație de valori medii)

$$J(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta)\, \mathrm{d}\omega \tag{A.6.2}$$

$$\mathcal{H}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos\theta\, \mathrm{d}\omega \tag{A.6.3}$$

$$K(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos^2\theta\, \mathrm{d}\omega \tag{A.6.4}$$

Se observă că J este intensitatea medie (după toate direcțiile), $\mathcal{H}$ este fluxul mediu, iar K este produsul dintre presiunea medie de radiație și viteza luminii c. Să înmulțim ecuația (A.6.1) cu $\mathrm{d}\omega/4\pi$ și să integrăm după toate direcțiile. Obținem

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}\tau} = J - J = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = \text{constant}, \tag{A.6.5}$$

adică mărimea $\mathcal{H}$ nu depinde de τ, așa cum era de așteptat.

Mai departe, să înmulțim ecuația (A.6.1) cu $\cos\theta\, \mathrm{d}\omega/4\pi$ și să integrăm după toate direcțiile. Obținem

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\tau} = \mathcal{H} \Rightarrow K = \mathcal{H}\tau + C, \tag{A.6.6}$$

unde C este o constantă de integrare.

Eddington a considerat că la adîncimi mari în fotosferă I este aproximativ independent de θ, astfel încît

$$K \simeq \frac{I}{4\pi} \int_{4\pi} \cos^2 \theta \, d\omega = I \overline{\cos^2 \theta} \tag{A.6.7}$$

unde $\overline{\cos^2\theta}$ este valoarea medie a lui $\cos^2\theta$ după toate direcţiile :

$$\overline{\cos^2\theta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{3} \tag{A.6.8}$$

Analog putem scrie

$$J \simeq \frac{I}{4\pi} \int_{4\pi} d\omega \simeq I \tag{A.6.9}$$

Din relaţiile (A.6.7) — (A.6.9) rezultă

$$K \simeq \frac{J}{3} \text{ — la adîncimi optice mari} \tag{A.6.10}$$

Mai departe se presupune că relaţia (A.6.10) este valabilă peste tot în fotosferă. Atunci din ecuaţia (A.6.6) rezultă

$$J = 3\mathcal{H}\tau + A \tag{A.6.11}$$

unde constanta de integrare $A = 3C$ rezultă din condiţiile la limită, care se pot lua, aproximativ, astfel :

$$I_0 \equiv I(\tau = 0, \theta) = \begin{cases} \bar{I}_0 \text{ pentru } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \\ 0 \text{ pentru } \pi/2 < \theta \leqslant \pi \end{cases} \tag{A.6.12}$$

adică fluxul de radiaţie dinspre exterior spre interior, la suprafaţa stelei, este nul (aici $\bar{I}_0$ este intensitatea medie pe discul stelei). De aici, pentru valorile la limită ale mărimilor J şi $\mathcal{H}$ rezultă

$$J_0 \equiv J(\tau = 0) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \bar{I}_0 \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \bar{I}_0 \tag{A.6.13}$$

$$\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}(\tau = 0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi/2} \bar{I}_0 \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{4} \bar{I}_0 \tag{A.6.14}$$

Deoarece $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ (fluxul este constant), rezultă că la $\tau = 0$, $J_0 = 2\mathcal{H}$ — condiţia la limită pentru J. Introducînd această condiţie la limită în soluţia (A.6.11) a lui J, obţinem

$$A = 2\mathcal{H} \Rightarrow J = 2\mathcal{H}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) = \frac{\bar{I}_0}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) \tag{A.6.15}$$

Din intensitatea medie J putem deduce distribuția temperaturii T cu adîncimea optică τ, pornind de la expresia densității de energie radiantă u

$$u = \frac{4\pi J}{c} = \frac{2\pi \bar{I}_0}{c}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) = aT^4(\tau), \tag{A.6.16}$$

ultima egalitate rezultînd din legea lui Stefan-Boltzmann. Introducînd în (A.6.16) temperatura efectivă a stelei prin relația

$$\pi \bar{I}_0 = \sigma T_e^4 \tag{A.6.17}$$

și punînd $a = 4\sigma/c$, rezultă următoarea lege de distribuție a temperaturii

$$T^4(\tau) = \frac{T_e^4}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) \tag{A.6.18}$$

Punînd $\tau = 0$ și $T(\tau = 0) = T_0$ rezultă că temperatura la suprafața stelei (fotosferei) este

$$T_0 = T_e/\sqrt[4]{2} \tag{A.6.19}$$

Pentru Soare, punînd $T_e = 5770$K, rezultă $T_0 = 4850$ K.

Soluția exactă a ecuației (A.6.1) se poate obține prin metoda aproximațiilor succesive a lui Hopf. În acest caz se poate arăta că distribuția temperaturii cu adîncimea optică este dată de relația

$$T^4(\tau) = \frac{T_e^4}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau + \Delta(\tau)\right), \tag{A.6.18'}$$

unde funcția $\Delta(\tau)$ este un termen corectiv mic ($|\Delta(\tau)| \ll 1$) ce permite trecerea de la distribuția aproximativă (Eddington) a temperaturii la cea exactă.

Legea de întunecare spre margine se obține astfel. Cilindrul din fig. 11.1 emite (într-un steradian) o energie integrală egală cu $(1/4\pi)j\rho\, dx \sec\theta$. Punînd $j = 4\pi\bar{\kappa}\mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ — funcția sursă, energia emisă va fi

$$\bar{\kappa}\rho\mathcal{J}\, dx \sec\theta = \mathcal{J} \sec\theta\, d\tau \tag{A.6.20}$$

Propagîndu-se pe drumul de grosime optică $\tau \sec\theta$, radiația va fi slăbită cu factorul $e^{-\tau \sec\theta}$. Deci din energia (A.6.20), la suprafața stelei ajunge energia

$$dI = \mathcal{J} e^{-\tau \sec\theta} \sec\theta\, d\tau \tag{A.6.21}$$

Intensitatea radiației emergente se va obține integrînd ecuația (A.6.21) după toate adîncimile optice posibile, adică

$$I(0, \theta) = \int_0^\infty \mathcal{J}(\tau) e^{-\tau \sec\theta} \sec\theta\, d\tau \tag{A.6.22}$$

Aceasta este *legea generală de întunecare spre margine*. Introducînd funcția sursă (A.6.15) în expresia (A.6.22) rezultă

$$I(0, \theta) = \frac{1}{2}\bar{I}_0\left(1 + \frac{3}{2}\cos\theta\right) \tag{A.6.23}$$

În centrul discului aparent ($\theta = 0$) avem $I(0, 0) = \frac{5}{4}\bar{I}_0$. De aici rezultă că legea de întunecare spre margine corespunzătoare aproximației Eddington va fi de forma

$$\frac{I(0, \theta)}{I(0, 0)} = 1 - \varkappa + \varkappa \cos \theta, \quad \varkappa = \frac{3}{5} \tag{A.6.24}$$

Mărimea $\varkappa$ din relația (A.6.24) se numește coeficient de întunecare spre margine. Valoarea $\varkappa = 3/5$ este în bună concordanță cu observațiile în radiație integrală efectuate asupra Soarelui.

Am obținut mai sus legea de întunecare spre marginea discului aparent în radiație integrală. Legea de întunecare spre margine în radiație monocromatică se obține de asemenea cu expresia (A.6.22), înlocuind pe $I(0, \theta)$ cu $I_\nu(0, \theta)$ și pe $\mathcal{J}(\tau)$ cu $B_\nu[T(\tau)]$, unde în funcția lui Planck distribuția temperaturii $T(\tau)$ se ia de forma (A.6.18). Mediind funcția $I_\nu(0, \theta)$ în raport cu θ se obține distribuția energiei în spectrul continuu, $\bar{I}_\nu$. În mod analog se poate obține $\bar{I}_\lambda$.

Cele spuse mai sus sînt valabile pentru cazul *atmosferei stelare gri* ($\varkappa_\nu = \bar{\varkappa} = \varkappa$ — const.), care dă o bună aproximație pentru stelele de tip solar. La stelele de tip spectral timpuriu ($B - A$), observațiile arată abateri însemnate de la *cazul gri*. Pentru cazul *non-gri* soluția se construiește pornind de la ecuația (11.9).

În concluzie, ecuația transferului radiativ ne furnizează:

— Distribuția temperaturii cu adîncimea optică în fotosferă;
— Legea de întunecare spre margine în radiație integrală;
— Legea de întunecare spre margine în radiație monocromatică;
— Distribuția energiei în spectrul continuu.

ANEXA 7

MODELE POLITROPICE. MODELUL STANDARD

1°. **Modele politropice.** Acestea sînt configurații stelare în echilibru, definite prin relația

$$P = K\rho^{1+1/n} \tag{A.7.1}$$

unde K și n sînt constante, n numindu-se indice politropic ($n \geqslant 0$). O asemenea relație între presiune și densitate poate avea loc dacă:

— P_{rad} — neglijabilă, iar steaua este în echilibru convectiv (adiabatic); atunci $P \simeq P_{gaz} = K\rho^{\gamma}$ și $n = 1/(\gamma - 1)$;

— P_{rad} — neglijabilă, iar steaua este în echilibru politropic; atunci $P \simeq P_{gaz} = K\rho^{\gamma'}$, unde exponentul politropic γ' are expresia $\gamma' = (C_p - C)/(C_v - C)$, $C = \text{const.}$ și $n = 1/(\gamma' - 1)$. Relația (A.7.1) poate fi îndeplinită și în alte cazuri mai generale, în care $P_{rad} \neq 0$.

Să găsim ecuația diferențială care descrie structura unei stele politropice. Ecuația continuității masei și ecuația echilibrului hidrostatic ne dau

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi G\rho \tag{A.7.2}$$

Facem schimbarea de funcție

$$\rho = \lambda\Psi^n \Rightarrow P = K\lambda^{1+(1/n)}\Psi^{n+1} \tag{A.7.3}$$

Introducem aceste expresii în ecuația lui Poisson (A.7.2) și găsim

$$\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\lambda^{(1/n)-1}\right]\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\right) = -\Psi^n. \tag{A.7.4}$$

Apoi efectuăm schimbarea de variabilă independentă

$$r = \alpha\xi, \quad \alpha = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\lambda^{(1/n)-1}\right]^{1/2} \tag{A.7.5}$$

și ecuația (A.7.4) devine

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\right) = -\Psi^n \tag{A.7.6}$$

Aceasta este *ecuația diferențială Lane-Emden de indice n.*

Luînd $\lambda = \rho_c$ — densitatea centrală a stelei — condițiile la limită vor fi următoarele

$$\Psi = 1, \frac{d\Psi}{d\xi} = 0 \text{ pentru } \xi = 0 \tag{A.7.7}$$

Prin urmare, structura stelei va fi descrisă, în cazul considerat, de ecuația (A.7.6) cu condițiile la limită (A.7.7).

Pentru $n = 0$, $n = 1$ și $n = 5$ soluția se exprimă prin funcții elementare astfel:

(1) Pentru $n = 0$, $\Psi_0 = 1 - (1/6)\xi^2$. Acest caz corespunde stelei omogene (ρ = constant).

(2) Pentru $n = 1$, $\Psi_1 = (\sin \xi)/\xi$.

(3) Pentru $n = 5$, $\Psi_5 = \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{-1/2}$. Acest caz corespunde stelei condensate central (toată masa este concentrată în centrul stelei).

Configurații stelare în întregime politropice sînt posibile numai pentru $0 \leqslant n \leqslant 5$.

În cazul general (n — oarecare), soluția ecuației (A.7.6) se exprimă sub formă de serie după puterile lui ξ^2, coeficienții seriei fiind funcții de n. Diferiți autori au calculat tabele care dau pe Ψ în funcție de ξ, ca și parametrii fizici ai modelelor politropice (pentru diferiți n).

2°. **Modelul standard.** Fie $\bar{\varepsilon}(r)$ producția (generarea) medie de energie (pe kilogram de materie și pe secundă) a sferei de rază r și $\bar{\varepsilon}$ — producția medie de energie a stelei, adică

$$\bar{\varepsilon}(r) = \frac{L(r)}{\mathcal{M}(r)} \text{ și } \bar{\varepsilon} = \frac{L}{\mathcal{M}} \tag{A.7.8}$$

Se definește funcția $\eta(r)$ prin raportul

$$\eta(r) = \bar{\varepsilon}(r)/\bar{\varepsilon} \tag{A.7.9}$$

Modelul standard (introdus de A. Eddington) este modelul stelar pentru care produsul

$$\kappa(r)\eta(r) = \text{const.} \tag{A.7.10}$$

Din ecuația echilibrului radiativ avem

$$\kappa = -\frac{4\pi acr^2}{3\rho L(r)} \cdot \frac{dT^4}{dr} \tag{A.7.11}$$

Din ecuația echilibrului hidrostatic obținem

$$\mathcal{M}(r) = -\frac{r^2}{G\rho} \cdot \frac{dP}{dr} \tag{A.7.12}$$

Introducînd expresiile (A.7.8), (A.7.9), (A.7.11), (A.7.12) în (A.7.10) obținem

$$\frac{4\pi acG\mathcal{M}}{3L} \cdot \frac{dT^4}{dP} = \text{const.} \tag{A.7.13}$$

Integrînd această ecuație diferențială, cu condiția la limită: $P = 0$ la $T = 0$ (la suprafață), rezultă

$$P = \text{const} \cdot T^4 \tag{A.7.14}$$

Fie $\beta = P_{gaz}/P$. Atunci putem scrie

$$P_{rad} = (1 - \beta)P = \frac{1}{3} aT^4 \tag{A.7.15}$$

Din ecuațiile (A.7.14), (A.7.15) rezultă

$$1 - \beta = \text{const.}, \quad \text{sau} \quad \beta = \text{const.} \tag{A.7.16}$$

Ecuația gazelor perfecte

$$P_{gaz} = \beta P = \frac{k}{\mu m_H} \cdot \rho T \tag{A.7.17}$$

dă pentru temperatură expresia

$$T = \frac{\beta \mu m_H}{k} \cdot \frac{P}{\rho} \tag{A.7.18}$$

Introducînd această expresie a lui T în ecuația (A.7.15), obținem

$$P = \left[\left(\frac{k}{\mu m_H}\right)^4 \cdot \frac{3}{a} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta^4}\right]^{1/3} \rho^{4/3} = K\rho^{4/3} \tag{A.7.19}$$

unde constanta K are expresia

$$K = \left[\left(\frac{k}{\mu m_H}\right)^4 \cdot \frac{3}{a} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta^4}\right]^{1/3} \tag{A.7.20}$$

Comparînd ecuațiile (A.7.1) și (A.7.19) se observă că ele coincid dacă $n = 3$. Prin urmare modelul standard are aceeași structură ca și modelul politropic de indice politropic $n = 3$. Modelul standard dă o bună aproximație pentru structura stelelor din secvența principală.

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

Aghekian, T. A., *„Stele, Galaxii, Metagalaxia"* (traducere din l. rusă de I. Mihăilă), Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1974.

Bakouline, P.; Kononovitch, E.; Moroz, V., *„Astronomie générale"*, Ed. Mir, Moscou, 1975.

Chiş, G.; Pál, Á., *„Astronomie"* (Curs de iniţiere), fasc. I—II, Universitatea „Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 1975.

Cox, J. P.; Giuli, R. T., *„Principles of Stellar Structure"*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, 1968.

Drâmbă, C., *„Elemente de mecanică cerească"*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.

Iacob, C., *„Mecanică teoretică"*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.

Kulin, Gy.; Róka, G. (coordonatori), *„A távcső világa"* (Universul lunetei), Gondolat Kiadó, Budapest. 1980.

Lungu, N., *„Pulsaţii stelare"* (Teorie matematică), Ed. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1982.

Mioc, V.; Oproiu, T., *„Rachete spaţiale"*, Ed. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1978.

Motz, L.; Duveen, A., *„Essentials of Astronomy"*, Blakie and Son Ltd., London, Glasgow, 1966.

Popovici, C., *„Stelele, date fizice, structura internă, originea şi evoluţia lor"*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.

Todoran, I., *„Cît mai aproape de stele"* (Astronomie generală), Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1977.

Ureche, V., *„Astronomie generală"*, Universitatea „Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 1975.

Ureche, V., *„Universul"*, vol. I. „Astronomie". Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1982.

Wyatt, S.P., *„Principles of Astronomy"*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1971.

Coli de tipar: 14,25. Planșe: 1.
Format: 16/70 × 100.
Bun de tipar: 17. XI. 1983. Ediția: 1983.
Nr. de plan: 9389.

Întreprinderea Poligrafică Cluj
B-dul Lenin Nr. 146.
Municipiul Cluj-Napoca
Republica Socialistă România
Comanda Nr. 382/1983.